解答例

STEP III 1993、第 14 問

力学 ・ 鉛直面内の円運動

STEP III 1993、問 14

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

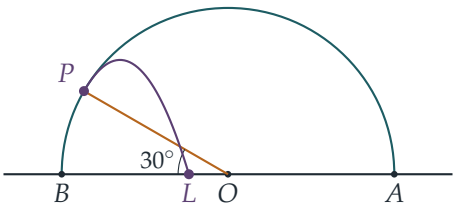
step.maths.org/questions/93-s3-q14

鍵となる考え方

糸は水平で、粒子は鉛直方向に打ち出されるので、速度ははじめ糸に垂直である。したがって粒子は O を中心とする半径 c の鉛直な円周上を運動し、A と直径の反対側にある点 B に着地する。各衝突（impact）は速度が鉛直のときに起こるので、衝突によって速さは単に半分になる。粒子が円の最高点を越えられなくなる最初の跳ね返りを求め、そのうえでエネルギーと動径方向の運動方程式を用いて張力（tension）が 0 になる位置を求めればよい。その後は通常の放物運動（projectile motion）である。

解答

粒子を質量 m の質点、糸を軽く伸び縮みしないもの、台を滑らかで水平なものとしてモデル化する。O を原点とし、$A=(c,0)$、$B=(-c,0)$ とする。粒子が上昇している側の水平な半径から上向きに測った角を θ とする。



衝突と衝突の間の運動

粒子が A または B から速さ V で鉛直上向きに台を離れたとする。その速度はぴんと張った糸に垂直であるから、糸が張っている間、粒子は O を中心とする半径 c の円周

上を運動する。力学的エネルギー保存則（conservation of energy）により、角 θ における速さ v は

$$v^2 = V^2 - 2gc\sin\theta.$$

を満たす。張力を T として O に向かう方向の成分をとると

$$T + mg\sin\theta = \frac{mv^2}{c} \quad\Longrightarrow\quad \frac{T}{m} = \frac{V^2}{c} - 3g\sin\theta.$$

$0 \le \theta \le 90^\circ$ では張力は最高点で最小となるので、半円全体で糸が張ったままであるための必要十分条件は $V^2 \ge 3gc$ である。（最高点を過ぎると $\sin\theta$ は再び減少するので、T は増加する一方である。）この場合、粒子は直径の反対側の端で台に降りてきて、エネルギーより再び速さ V で鉛直下向きに運動している。

この衝突では速度が台に垂直であるから、跳ね返りは鉛直で速さは $\frac{1}{2}V$ となり、糸は依然として水平で張っている。したがって、V が半分になった状態で全過程が繰り返される。

糸がたるむ位置

粒子は $V_0 = 64\sqrt{6gc}$ で出発するので、$V_0^2 = 24576\,gc$ である。k 回の衝突後の速さは $V_k = V_0/2^k$ であるから

$$V_k^2 = \frac{24576}{4^k}\,gc: \qquad V_6^2 = 6gc, \qquad V_7^2 = \tfrac{3}{2}gc.$$

よって速さ $V_0, \ldots, V_6$ で始まる半円はすべて完走され（いずれも $V_k^2 \ge 3gc$）、衝突は B, A, B, A, B, A, B の順に起こる。7 回目の衝突は B で起こり、粒子は $V_7^2 = \frac{3}{2}gc < 3gc$ で B から上昇する。

考えてみよう 糸が先にたるむのではなく、糸がたるむ前に粒子が落ち戻ることはありえないか？

ありえない。速さが 0 になるのは $V_7^2 = 2gc\sin\theta$、すなわち $\sin\theta = \frac{3}{4}$ のときであるが、張力はそれより早く、

$$\frac{V_7^2}{c} = 3g\sin\theta \quad\Longrightarrow\quad \tfrac{3}{2}gc = 3gc\sin\theta \quad\Longrightarrow\quad \sin\theta = \tfrac{1}{2}.$$

となるところで 0 になる。したがって糸は $\theta = 30^\circ$、すなわち B 側の点 P でたるみ、その高さは台から $c\sin\theta = c/2$ であり、題意のとおりである。

A と B の間での最初の跳ね返り

P では $\theta = 30^\circ$ であるから $P = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}c,\ \frac{1}{2}c\right)$ であり、

$$v^2 = \tfrac{3}{2}gc - 2gc\cdot\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}gc.$$

速度は接線方向、すなわち OP に垂直で、上向きかつ O の側を向いており、水平と 60° をなす。よってその成分は

$$v_x = \tfrac{1}{2}v, \qquad v_y = \tfrac{\sqrt{3}}{2}v, \qquad \text{ただし} v_x^2 = \tfrac{1}{8}gc, \quad v_y^2 = \tfrac{3}{8}gc.$$

ここから先、粒子は放物運動をする。台に達するのは $\frac{1}{2}c + v_y t - \frac{1}{2}gt^2 = 0$ のときであり、正の解をとると

$$t = \frac{v_y + \sqrt{v_y^2 + gc}}{g} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{11}}{\sqrt{8}}\sqrt{\frac{c}{g}}.$$

この間の水平方向の変位は

$$v_x t = \sqrt{\frac{gc}{8}} \cdot \frac{\sqrt{3}+\sqrt{11}}{\sqrt{8}}\sqrt{\frac{c}{g}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{11}}{8}\,c,$$

であるから、粒子は

$$x_L = -\frac{\sqrt{3}}{2}c + \frac{\sqrt{3}+\sqrt{11}}{8}c = \frac{\sqrt{11}-3\sqrt{3}}{8}\,c \approx -0.235\,c.$$

を満たす点 L に着地する。（この飛行の間、粒子は常に O から距離 c 以内にあるので、L に達する前に糸が再び張ることはない。特に $|x_L| < c$ である。）

$\sqrt{11} < \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$ であるから $x_L < 0$ であり、着地点は O に関して B と同じ側にある。O は AB の中点であるから、A と B の間での最初の跳ね返りは B **に近い側**で起こり、B からの距離は約 $0.77c$、A からの距離は約 $1.23c$ である。

検算

- 判定条件 $V_k^2 \geq 3gc$ により、最初に完走されない半円は $k = 7$ であり、$V_7^2 = \frac{3}{2}gc$ である。たるみの条件から $\sin\theta = \frac{1}{2}$ が得られる。
- P において重力の動径方向成分 $g\sin 30^\circ = \frac{1}{2}g$ は $v^2/c = \frac{1}{2}g$ に等しく、張力 0 の条件をちょうど満たしている。
- 逐次的な数値シミュレーション（$g = 9.8$、$c = 1.3$）では、糸がたるむ高さは $0.5000c$、着地点は $x \approx -0.2349c$ であり、飛行中に O からの距離が c を超えることはなかった。

よくある間違い

- 半円を完走する条件として $V^2 \geq 4gc$（最高点にちょうど達する条件）を用いてしまう。棒とは異なり、糸の場合は $V^2 \geq 3gc$ が必要である。

- 7 回目の衝突がどちらの端で起こるかを見失う。奇数回目の衝突は B で起こる。
- P における速度の向きを誤る。速度は OP に垂直で、水平と 60° をなすのであって、30° ではない。

STEP のその先へ

糸がたるむ瞬間とは、拘束（constraint）が外れる瞬間である。張力は $|OP| = c$ を保つためのラグランジュ乗数（Lagrange multiplier）であり、それが負にならなければならなくなったとき、拘束は作用しなくなる。このような片側拘束や衝突を含む問題は、大学の力学で体系的に扱われる。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、エネルギーと動径方向の運動方程式をこのように組み合わせて用いる様子を見るのによい本である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。