解答例

STEP III 1993、第 13 問

力学 ・ 質量が変化する鎖

> **STEP III 1993、問 13**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/93-s3-q13

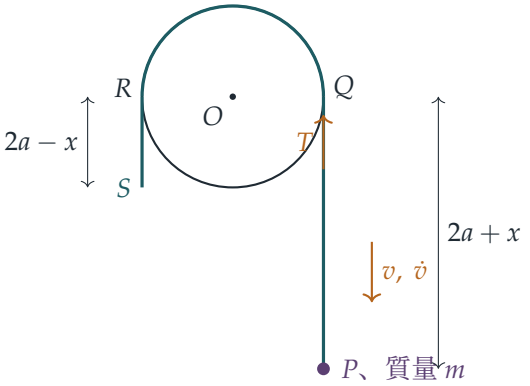
鍵となる考え方

鎖は滑らないので、円板、鎖全体、質点はすべて同じ速さで動く。したがって未知数は v ただ一つである。このとき運動エネルギー（kinetic energy）は $\frac{1}{2}$(有効質量)v^2 となる。位置エネルギー（potential energy）について変化するのは垂れ下がっている 2 つの部分だけである。上部にかかる弧の部分は、同じ形の鎖に次々と置き換わるだけだからである。張力（tension）を求めるには、動いている部分 PQ と質点をまとめて考える。そのうえで、Q でそこに加わる鎖がすでにどれだけの速さで動いているかをよく考えてほしい。

解答

モデル

円板は一様な薄板（lamina）であり、O を通るなめらかな固定軸のまわりを回転する。その慣性モーメント（moment of inertia）は $\frac{1}{2}(4m)a^2 = 2ma^2$ である。鎖は単位長さあたりの質量が m/a の一様な鎖で、伸び縮みせず（inextensible）、円板の縁の上で滑らない。質点は大きさのない点とみなす。P が x だけ下がったとき、右側の部分 QP の長さは $2a + x$、左側の部分 RS の長さは $2a - x$ であり、弧 RQ は長さ πa の半円である。鎖のどの点も速さ v で動き、滑りがないので円板の縁も同じ速さで動く。よって円板の角速度（angular speed）は $\omega = v/a$ である。



速さ

運動エネルギー。 円板の寄与は $\frac{1}{2}(2ma^2)(v/a)^2 = mv^2$、鎖の寄与は $\frac{1}{2}(4+\pi)mv^2$、質点の寄与は $\frac{1}{2}mv^2$ である。よって

$$\mathrm{KE} = \tfrac{1}{2}mv^2(2+4+\pi+1) = \tfrac{1}{2}(\pi+7)mv^2.$$

位置エネルギー。 弧 RQ はつねに同じ半円形の鎖なので、その位置エネルギーは変化しない。O の高さを基準（ゼロ）にとる。この高さより下に垂れ下がった長さ ℓ の部分は、質量が $m\ell/a$ で、重心（centre of mass）が深さ $\frac{1}{2}\ell$ にあるので、その位置エネルギーは $-\dfrac{mg\ell^2}{2a}$ である。したがって、垂れ下がった 2 つの部分の位置エネルギーの減少量は

$$\frac{mg}{2a}\left[(2a+x)^2 + (2a-x)^2 - (2a)^2 - (2a)^2\right] = \frac{mg}{2a}\cdot 2x^2 = \frac{mgx^2}{a}.$$

である。質点の位置エネルギーは mgx だけ減少する。

エネルギー。 軸はなめらかであり、滑りがないので粗い接触面は仕事をしない。よってエネルギーは保存され、静止状態から始めると

$$\tfrac{1}{2}(\pi+7)mv^2 = \frac{mgx^2}{a} + mgx \quad\Longrightarrow\quad (\pi+7)av^2 = 2g(x^2+ax),$$

となり、示すべき式が得られた。

加速度

時間で微分し、$\dot{x} = v$ を用いると

$$2(\pi+7)av\dot{v} = 2g(2x+a)v \quad\Longrightarrow\quad \dot{v} = \frac{g(2x+a)}{(\pi+7)a} \qquad (v \neq 0).$$

S が R に達するのは $x = 2a$ のときであり、このとき

$$\dot{v} = \frac{5g}{\pi+7}, \qquad v^2 = \frac{2g(4a^2+2a^2)}{(\pi+7)a} = \frac{12ga}{\pi+7}.$$

Q における張力

Q における張力を T とする。質点と、Q より下に垂れ下がった鎖をまとめて 1 つの系とみなす。その質量は

$$M = \frac{m}{a}(2a + x) + m,$$

であり、鎖が円板から離れてくるにつれて $\dot{M} = \dfrac{m}{a}v$ の割合で増加する。この系にはたらく外力は、下向きの重力 Mg と上向きの T である。系全体は下向きに速さ v で動いている。

> **考えてみよう** PQ に加わろうとしている鎖は、加わる直前にどれだけの速さで動いているか。

Q では円板の縁が鉛直になっているので、そこに到達する鎖はすでに鉛直下向きに速さ v で動いている。その鎖は運動量 $v\,\delta M$ を持ち込む。したがって可変質量（variable mass）の運動方程式（運動量の変化率 = 力 + 単位時間あたりに持ち込まれる運動量）は

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Mv) = Mg - T + v\dot{M}, \qquad \text{すなわち} \qquad M\dot{v} = Mg - T.$$

となる。S が R に達したとき $M = 5m$ なので

$$T = 5m\left(g - \frac{5g}{\pi + 7}\right) = \frac{5(\pi + 2)}{\pi + 7}\,mg.$$

力のモーメント（*moment*）による検証。 円板と鎖の弧 RQ をまとめて考える。軸からの力は O を通ってはたらき、弧にはたらく重力の O のまわりのモーメントの合計は 0 である（弧は O を通る鉛直線に関して対称だからである）。また鎖と円板の間の摩擦は内力である。弧のどの部分も O から距離 a の位置を速さ v で動く。よって角運動量（angular momentum）は $(2ma^2 + \pi ma^2)(v/a)$ であり、

$$(T - T_R)a = (2 + \pi)ma\,\dot{v}.$$

が成り立つ。S が R に達したとき左側の部分の長さは 0 になっているので、$T_R = 0$ である。これより、再び $T = (2 + \pi)m \cdot \dfrac{5g}{\pi + 7} = \dfrac{5(\pi + 2)}{\pi + 7}mg$ が得られる。

問題に記載された答え。 問題文に記載された値 $\dfrac{5\pi - 2}{\pi + 7}mg$ は、$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Mv) = Mg - T$ と書いた場合に得られる値とちょうど一致する。これは、PQ に加わる鎖が静止した状態で到達するとみなすことに相当する：

$$T = M(g - \dot{v}) - \frac{m}{a}v^2 = \frac{5(\pi + 2)}{\pi + 7}mg - \frac{12}{\pi + 7}mg = \frac{5\pi - 2}{\pi + 7}mg.$$

これは、静止した霧を取り込んでいく雨粒に対しては正しい方程式である。しかしここでは正しくない。縁を回ってくる鎖は、すでに PQ と一緒に動いているからである。

我々の 2 つの方法はどちらも $\dfrac{5(\pi+2)}{\pi+7}mg$ で一致するので、記載された答えにはこの誤りが含まれていると考えられる。記載された値が必要な場合は「静止状態で加わる」とする方程式を用いればよいが、それは T を mv^2/a だけ少なく見積もっていることを知っておいてほしい。

検算

- $x=0$ のとき、公式から $v=0$、$\dot{v}=g/(\pi+7)$ が得られる。つり合っていない力は質点の重さ mg だけであり、それが有効質量 $(\pi+7)m$ にはたらいている。
- 運動方程式 $(\pi+7)m\dot{v} = mg(2x+a)/a$ を静止状態から数値的に積分すると、$(\pi+7)av^2 = 2g(x^2+ax)$ が誤差 10^{-11} 以内で再現される。$m=a=1$、$g=9.81$ とすると、運動量による方法とモーメントによる方法はどちらも $T/mg \approx 2.5349 = 5(\pi+2)/(\pi+7)$ を与える。「静止状態で加わる」とする方法では $1.3517 = (5\pi-2)/(\pi+7)$ となる。
- 垂れ下がっている質量 $5m$ は下向きに加速しているので、当然 $T<5mg$ でなければならず、実際そうなっている。

よくある間違い

- 円板の運動エネルギーを忘れる。あるいは慣性モーメントとして $\frac{1}{2}(4m)a^2$ の代わりに ma^2 を用いる。
- 位置エネルギーの変化に鎖の弧の部分を含めてしまう。弧の形と位置は決して変わらない。
- 取り込まれる質量がもともとどのような速度を持っていたかを考えずに、$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Mv) = F$ を用いる。

STEP のその先へ

可変質量の問題の本質は、系をどう選ぶかを決め、その境界を通過する運動量を追跡することにある。これが検査体積（control volume）の考え方であり、ロケットの運動や流体力学（fluid mechanics）の多くの部分の基礎となっている。ここでのよくある誤り、すなわち質量が変化する場合にはいつでも $F=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mv)$ が成り立つと仮定することは、有名な落とし穴である。一般にこの方程式は、座標系（frame of reference）の取り方に依存しないことすら保証されていない。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）では、可変質量の系が丁寧に扱われている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。