解答例

STEP III 1993、第 12 問

力学 ・ 弾性ひもとエネルギー

STEP III 1993、問 12

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

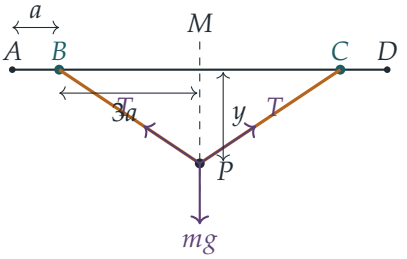
step.maths.org/questions/93-s3-q12

鍵となる考え方

釘（peg）はなめらかで、質点は弦の中点にあるので、弦は自然長（natural length）がそれぞれ a の同一な二つの半分に分かれ、各半分の張力（tension）はその全長にわたって一定である。各半分は固定端から釘を経由して P まで下がる（または上がる）ので、伸びた長さは距離 BP だけで決まる。伸び（extension）を P の高さで表せば、つり合い（equilibrium）から k が求まり、エネルギー保存則（conservation of energy）によって Q と R が結びつく。

解答

P を質点（particle）、弦を軽い弾性弦（elastic string）、釘をなめらかなものとしてモデル化する。対称性より、P は BC の中点 M を通る鉛直線上を動く。P の M から下向きに測った深さを y とする。P が BC より上にあるときは負である。



k を求める

半分 $A \to B \to P$ の長さは $a + BP = a + \sqrt{9a^2 + y^2}$、自然長は a であるから、その伸びは

$$x = \sqrt{9a^2 + y^2}.$$

フックの法則（Hooke's law）より、各半分の張力は

$$T = \frac{kmg\,x}{a}.$$

BP が水平となす角を θ とすると、$\sin\theta = |y|/x$ である。P において力を鉛直方向に分解する（resolve）と

$$2T\sin\theta = mg \quad \Longrightarrow \quad 2 \cdot \frac{kmg\,x}{a} \cdot \frac{y}{x} = mg \quad \Longrightarrow \quad \frac{2ky}{a} = 1.$$

平方根が消えたので、$BP = \frac{\sqrt{145}}{4}a$ という厄介な値はまったく関係しない。$y = a/4$ とすると $k/2 = 1$ となるので、

$$k = 2.$$

Q から R までのエネルギー

各半分は弾性エネルギー（elastic energy）$\dfrac{kmg\,x^2}{2a}$ を蓄えるので、$k = 2$ のとき二つの半分が蓄えるエネルギーの合計は

$$E(y) = 2 \cdot \frac{2mg\,x^2}{2a} = \frac{2mg\,(9a^2 + y^2)}{a}.$$

考えてみよう なぜ P は R で止まるのか。また、P が最終的に釘より上に来ても問題ないのはなぜか。

P は Q で静かに放され、R は上昇する最高点なので、そこでも一瞬静止する。BC より上でも各半分は伸びたままである（どちらも $x \geq 3a > 0$ である）ので、E の同じ式が使える。弦がたるむことはない。

Q では $y = pa$、R では $y = -3a$ である。質点は $(p+3)a$ だけ上昇する。釘はなめらかでほかに損失もなく、両端で運動エネルギー（kinetic energy）は o であるから、

$$\begin{aligned} E(pa) &= E(-3a) + mg(p+3)a \\ 2mga(9+p^2) &= 2mga(9+9) + mga(p+3) \\ 18 + 2p^2 &= 36 + p + 3, \end{aligned}$$

これより

$$2p^2 - p - 21 = 0, \qquad \text{すなわち} \qquad (2p+6)(p-\tfrac{7}{2}) = 0.$$

$p > 0$ より $p = \frac{7}{2}$ である。

これは問題文に印刷された $2p^2 - p - 17 = 0$ と**一致しない**。直接の数値シミュレーションも含めてモデルを注意深く確認した（検算を参照）が、与えられたデータから得られるのは -21 である。きれいな根 $p = \frac{7}{2}$ が得られることから、意図された定数は 21 であり、17 は誤植であると考えられる。最後の部分は、どちらの定数が正しいかには依存しない。

P が初めて止まるのが本当に R であることを確かめるため、$y = ta$ とおく。深さ ta での運動エネルギーは

$$E(pa) - E(ta) - mg(p-t)a = mga\,(p-t)(2p+2t-1).$$

$p = \frac{7}{2}$ のとき、これは $mga\,(\frac{7}{2} - t)(2t+6)$ である。これは $-3 < t < \frac{7}{2}$ で正であり、$t = -3$ で初めて 0 になる。これが R である。

張力の比較

張力は $T = 2mg\,x/a$ であり、x について増加するので、x が R において Q におけるより小さいことを示せばよい。エネルギーの式を使えば、p の値を用いずにこれを示せる。

$$E(Q) - E(R) = mg(p+3)a > 0.$$

弾性エネルギーは $\dfrac{2mg\,x^2}{a}$ なので $x_R^2 < x_Q^2$ であり、$x_R < x_Q$、したがって $T_R < T_Q$ となる。言葉で言えば、質点は上昇する間に位置エネルギー（potential energy）を得るが、そのエネルギーは弦からしか供給されないので、R では弦の伸びは小さくなっていなければならない。

具体的には、$p = \frac{7}{2}$ のとき $x_Q = \frac{\sqrt{85}}{2}a$、$x_R = 3\sqrt{2}\,a$ であるから、

$$T_Q = \sqrt{85}\,mg \approx 9.22\,mg, \qquad T_R = 6\sqrt{2}\,mg \approx 8.49\,mg.$$

検算

- **単振動による検算。** P にはたらく上向きの力は $2T \cdot \dfrac{y}{x} = \dfrac{4mg\,y}{a}$ であり、BC の下でも上でも y について線形である。したがって P は $y = a/4$（上で求めたつり合いの位置）を中心に単振動（simple harmonic motion）をする。$y = \frac{7}{2}a$ で静かに放されるので振幅は $\frac{13}{4}a$ であり、最高点は $y = \frac{1}{4}a - \frac{13}{4}a = -3a$ である。これはちょうど R であり、$p = \frac{7}{2}$ が独立に確認される。
- $a = 1, k = 2, p = 3.5$ として運動方程式を数値積分すると、最高点は $y = -3.0000$ となる。

- 印刷された方程式からは $p = \frac{1+\sqrt{137}}{4} \approx 3.18$ が得られるが、このときエネルギーの収支は $4mga$ だけ合わない。

よくある間違い

- 各半分の長さを計算するときに線分 AB を忘れる。半分の長さは $AB + BP = a + BP$ であり、その伸びが BP となるのは AB が自然長 a に等しいからにすぎない。
- 弦全体を張力 $kmg \cdot (\text{全体の伸び})/(2a)$ の一本のばねとして扱う。これでも同じ答えが得られるが、それは伸びとして**全体の**伸び $2x$ を用いた場合に限る。
- P が BC より上にあるときにも弾性エネルギーが残っていることを忘れる。そこでも弦は伸びたままである。

STEP のその先へ

弦の幾何は非線形であるにもかかわらず、鉛直方向の復元力（restoring force）は変位にちょうど比例した。これは、長さに比例する張力の鉛直成分は鉛直方向の距離に比例するからであり、自然長ゼロのばね（zero-natural-length spring）が理想的な吊り下げ装置になるのと同じ理由である（LaCoste の長周期地震計の原理）。座標について二次式である位置エネルギーからは線形の運動方程式が導かれ、これが微小振動と基準振動（normal modes）の理論の出発点である。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、ばね、エネルギー、振動をこの精神で扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。