解答例

STEP III 1993、第 11 問

力学 ・ 偶力と慣性モーメント

STEP III 1993、問 11

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/93-s3-q11

鍵となる考え方

立方体に座標を入れ、すべての力をベクトルで表す。6 つの力の和は零になるので、これらの力の働きは**偶力**（couple）を加えることだけであり、偶力のモーメント（moment）はどの点のまわりでも同じである。すると小問 (i) は、そのモーメントの向きを求める問題になる。小問 (ii) では、その OO' 方向の成分だけを用いる。あわせて、点と直線の距離を使って慣性モーメント（moment of inertia）を棒 1 本ずつ積み上げて求める。

解答

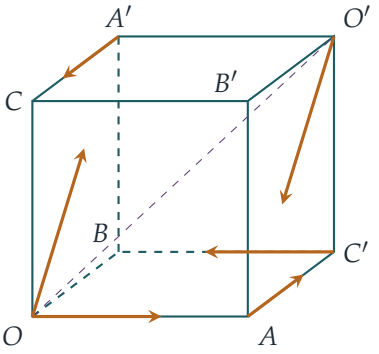
枠は剛体（rigid body）であり、細い一様な棒でできていて、重力は働かないものとしてモデル化する。O を原点とし、OA、OB、OC に沿った単位ベクトルをとると、

$$A = (a, 0, 0), \quad B = (0, a, 0), \quad C = (0, 0, a),$$

であり、それぞれの反対側の頂点は

$$O' = (a, a, a), \quad A' = (0, a, a), \quad B' = (a, 0, a), \quad C' = (a, a, 0).$$

である。



琥珀色の矢印は 6 つの作用線（line of action）を表し、対角線 OO' は紫の破線で示してある。

小問 (i)

各力は、その大きさに作用線方向の単位ベクトルを掛けたものである。たとえば $O'A$ はベクトル $(0,-a,-a)$ で、その長さは $\sqrt{2}\,a$ であるから、これに沿った大きさ $\sqrt{2}\,mg$ の力は $mg(0,-1,-1)$ となる。6 つすべてについて同様にすると、次のようになる。

直線	直線上の点	力
OA	O	$mg(2,0,0)$
AC'	A	$mg(0,1,0)$
$O'A$	A	$mg(0,-1,-1)$
OA'	O	$mg(0,1,1)$
$C'B$	B	$mg(-2,0,0)$
$A'C$	C	$mg(0,-1,0)$

力の和は $\mathbf{0}$ である。合力（resultant）が零である力の系は偶力と同等であり、そのモーメントはどの点のまわりでも同じである。O のまわりのモーメントをとる（OA と OA' に沿った力は O を通るので寄与しない）。

$$\begin{aligned}\mathbf{G} &= A\times mg(0,1,0) + A\times mg(0,-1,-1) + B\times mg(-2,0,0) + C\times mg(0,-1,0)\\ &= amg[(0,0,1)+(0,1,-1)+(0,0,2)+(1,0,0)]\\ &= amg\,(1,1,2).\end{aligned}$$

O の支点は枠に力を及ぼしうるが、その力は O を通って働くので、O のまわりのモーメントをもたない。したがって、静止状態から動き出す枠は、O を通り偶力の軸に沿

った直線のまわりに回転し始める。その方向は

$$\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},$$

であり、これが求めるものであった。

興味のある人へ。これが問題の意図する答えであり、答案にはこう書けばよい。ただし厳密には、3 次元で自由に回転できる物体の角加速度（angular acceleration）は $\mathbf{I}^{-1}\mathbf{G}$ である。ここで $\mathbf{I}$ は O のまわりの慣性**テンソル**（inertia tensor）である。これが $\mathbf{G}$ の向きを向くのは、$\mathbf{G}$ が主軸（principal axis）に沿っているときに限られる。この枠の O のまわりの慣性モーメントは、OO' のまわりでは $14ma^2/3$（小問 (ii) より）、O を通り OO' に垂直などの軸のまわりでも $41ma^2/3$ である。このことから、回転し始める軸の方向は $(25,25,32)$ となり、$(1,1,2)$ から約 12.6° ずれている。

小問 (ii)

$\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$ を OO' 方向の単位ベクトルとする。$\mathbf{p}\cdot\mathbf{u}$ は $\mathbf{p}$ の直線方向の成分であるから、ピタゴラス（Pythagoras）の定理により、点 $\mathbf{p}$ と直線 OO' の距離の 2 乗は

$$d^2 = |\mathbf{p}|^2 - (\mathbf{p}\cdot\mathbf{u})^2$$

である。

棒 OA。O から距離 x にある点は $(x,0,0)$ であるから、$d^2 = x^2 - \frac{x^2}{3} = \frac{2}{3}x^2$ となる。長さ $\mathrm{d}x$ の微小部分の質量は $\frac{m}{a}\,\mathrm{d}x$ であるから、

$$I_{OA} = \int_0^a \frac{m}{a}\cdot\frac{2x^2}{3}\,\mathrm{d}x = \frac{2ma^2}{9}.$$

中点 $(\frac{a}{2},0,0)$ と OO' の距離の 2 乗は $\frac{2}{3}\cdot\frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{6}$ である。平行軸の定理（parallel axis theorem）により、中点を通る平行な軸のまわりでは

$$I_{\text{中点}} = \frac{2ma^2}{9} - m\cdot\frac{a^2}{6} = \frac{ma^2}{18}.$$

棒 $B'C$。この棒は $(a,0,a)$ から $(0,0,a)$ まで伸びているので、OA と平行である。また長さも同じで、軸に対して同じ角度に置かれている。よって、自身の中点を通る平行な軸のまわりの慣性モーメントはやはり $ma^2/18$ である。その中点は $\mathbf{p} = (\frac{a}{2},0,a)$ であり、

$$d^2 = \frac{a^2}{4} + a^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{3a}{2}\right)^2 = \frac{5a^2}{4} - \frac{3a^2}{4} = \frac{a^2}{2}.$$

平行軸の定理により、

$$I_{B'C} = \frac{ma^2}{18} + \frac{ma^2}{2} = \frac{5ma^2}{9}.$$

考えてみよう 本当に 12 本の棒すべてについてこれを計算しなければならないのだろうか？

その必要はない。対称性が代わりにやってくれる。OO' のまわりの 120° の回転（$x \to y \to z \to x$ と巡回させる）と、立方体の中心に関する点対称移動（point reflection）$\mathbf{p} \mapsto (a,a,a) - \mathbf{p}$ は、いずれも枠と直線 OO' をそれ自身に移す。よって、これらは OO' のまわりの慣性モーメントを変えない。回転は OA を OB と OC に移し、点対称移動はこれらを $O'A'$、$O'B'$、$O'C'$ に移す。これらは O または O' を端点にもつ 6 本の棒であり、それぞれの慣性モーメントは $2ma^2/9$ である。同様に、$B'C$ は立方体の中ほどを一周する「ジグザグ」AB'、$B'C$、CA'、$A'B$、BC'、$C'A$ の残りの 5 本に移され、これらの慣性モーメントはいずれも $5ma^2/9$ である。したがって

$$I_{\text{枠}} = 6 \cdot \frac{2ma^2}{9} + 6 \cdot \frac{5ma^2}{9} = \frac{42ma^2}{9} = \frac{14ma^2}{3},$$

となり、これが求めるものであった。

角加速度。今度は、枠は固定された直線 OO' のまわりにしか回転できない。軸受けがこの直線に垂直な向きに必要なだけの偶力を供給するので、加えられた偶力のうち枠を回転させるのは OO' 方向の成分だけである。力は依然として偶力 $\mathbf{G} = amg(1,1,2)$ をなし、任意の直線のまわりのそのモーメントは、その直線方向の成分である。

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{u} = \frac{amg(1+1+2)}{\sqrt{3}} = \frac{4amg}{\sqrt{3}}.$$

固定軸のまわりの回転の方程式 $I\ddot{\theta} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{u}$ より

$$\ddot{\theta} = \frac{4amg/\sqrt{3}}{14ma^2/3} = \frac{12g}{14\sqrt{3}\,a} = \frac{2\sqrt{3}\,g}{7a}.$$

その向きは、O' から O の方を見たときに反時計回り、すなわち $\overrightarrow{OO'}$ の方向に関する右ねじの向きの回転である。

検算

- 6 つの力にはそれぞれ「相方」がある。OA と $C'B$、AC' と $A'C$、$O'A$ と OA' である。各組は平行な直線上で大きさが等しく向きが逆であり、そのため合力が零になる。
- 枠は中心に関して立方体の対称性をもつので、中心を通るどの軸のまわりでも慣性モーメントは同じである。中心を通り OC に平行な軸のまわりでは、鉛直な 4 本の棒の寄与は $4m(a/\sqrt{2})^2 = 2ma^2$ である。水平な 8 本の棒の寄与はそれぞれ $\frac{ma^2}{12} + \frac{ma^2}{4} = \frac{ma^2}{3}$ である。合計は $\frac{14ma^2}{3}$ となり、OO' も中心を通るので、上の答えと一致する。

- 数値的に、$a = m = g = 1$ として 12 本の棒について中点和を計算すると $I = 4.66667$、$\ddot{\theta} = 0.494872$ となり、$2\sqrt{3}/7 \approx 0.494872$ と一致する。

よくある間違い

- 面の対角線に沿った力 $\sqrt{2}\,mg$ を成分に直すときに、因数 $1/\sqrt{2}$ を忘れること。各成分の大きさは mg であり、$\sqrt{2}\,mg$ ではない。
- 小問 (ii) で、固定軸方向の成分ではなく偶力全体 $|\mathbf{G}| = \sqrt{6}\,amg$ を用いること。
- 重心を通らない軸から平行軸の定理を適用すること。$2ma^2/9$ から $ma^2/18$ を求めた段階のように、必ず重心を**経由**しなければならない。

STEP のその先へ

3 次元の回転では、慣性モーメントは 3×3 の対称行列（symmetric matrix）である慣性テンソルとなり、角運動量（angular momentum）は $\mathbf{L} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}$ で与えられる。その固有ベクトル（eigenvector）が主軸である。小問 (i) の注で見たように、物体は一般には加えられた偶力の軸のまわりに回転し始めるわけではない。立方体の枠はよい例である。中心を通るどの軸のまわりでも慣性モーメントは同じだが、頂点のまわりではそうはならない。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、慣性テンソルを含め、3 次元の剛体運動を詳しく展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。