解答例

STEP III 1993、第 10 問

純粋数学 ・ 行列による変換

STEP III 1993、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

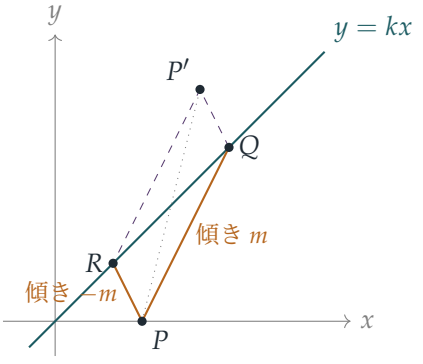
step.maths.org/questions/93-s3-q10

鍵となる考え方

ここで扱う点はすべて 2 直線の交点であるから、座標は 1 次方程式を 1 つずつ解けば求まる。P' は平行四辺形からただちに得られる。平行四辺形 $PQP'R$ では対角線が互いに他を二等分するので、位置ベクトルとして $P + P' = Q + R$ が成り立つ。P' を行列と P の積として表してしまえば、面積に関する問いは行列式（determinant）の計算にすぎない。

解答

以下、つねに $m^2 \neq k^2$ を仮定する。$m = \pm k$ ならば、P を通る 2 直線の一方は $y = kx$ に平行となり、これと交わらない（あるいはこれに重なる）ので、作図が成り立たない。



（図では $m = 2$、$k = 1$、$P = (1, 0)$ としている。）

点 Q

$P(x_1, y_1)$ を通り $y = mx$ に平行な直線は $y - y_1 = m(x - x_1)$ である。Q では $y = kx$ も成り立つから、

$$kx - y_1 = mx - mx_1 \quad \Longrightarrow \quad (m-k)x = mx_1 - y_1 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{mx_1 - y_1}{m-k},$$

となる。ここで $m - k \neq 0$ で割った。さらに $y = kx$ より

$$Q = \left(\frac{mx_1 - y_1}{m-k}, \frac{k(mx_1 - y_1)}{m-k} \right),$$

を得る。これが示すべきことであった。

点 R

P を通り $y = -mx$ に平行な直線については、m を $-m$ に置き換えて同じ計算をすればよい。

$$x = \frac{-mx_1 - y_1}{-m-k} = \frac{mx_1 + y_1}{m+k}, \qquad R = \left(\frac{mx_1 + y_1}{m+k}, \frac{k(mx_1 + y_1)}{m+k} \right).$$

点 P'

> **考えてみよう** これ以上直線の交点を求めずに、平行四辺形の 4 つ目の頂点を求めるにはどうすればよいか。

頂点は P, Q, P', R の順に並ぶので、PP' と QR が対角線である。平行四辺形の対角線は互いに他を二等分するから、両者の中点は一致する。

$$\tfrac{1}{2}(P + P') = \tfrac{1}{2}(Q + R) \quad \Longrightarrow \quad P' = Q + R - P.$$

（同じことであるが、$\overrightarrow{QP'} = \overrightarrow{PR}$ である。）Q と R はともに $y = kx$ 上にあるので、まず x 座標どうしを足すのがもっとも簡単である。共通の分母 $m^2 - k^2$ で通分すると

$$\begin{aligned} x_Q + x_R &= \frac{(mx_1 - y_1)(m+k) + (mx_1 + y_1)(m-k)}{m^2 - k^2} \\ &= \frac{(m^2x_1 + mkx_1 - my_1 - ky_1) + (m^2x_1 - mkx_1 + my_1 - ky_1)}{m^2 - k^2} \\ &= \frac{2(m^2x_1 - ky_1)}{m^2 - k^2}, \end{aligned}$$

であり、また $y_Q + y_R = k(x_Q + x_R)$ である。したがって $P' = (x', y')$ とおくと

$$x' = \frac{2(m^2x_1 - ky_1)}{m^2 - k^2} - x_1 = \frac{(m^2 + k^2)x_1 - 2ky_1}{m^2 - k^2},$$

$$y' = \frac{2k(m^2x_1 - ky_1)}{m^2 - k^2} - y_1 = \frac{2km^2x_1 - (m^2 + k^2)y_1}{m^2 - k^2}.$$

T を行列で表す

どちらの座標も x_1, y_1 の 1 次式で定数項をもたないから、

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{M} = \frac{1}{m^2 - k^2} \begin{pmatrix} m^2 + k^2 & -2k \\ 2km^2 & -(m^2 + k^2) \end{pmatrix}.$$

面積

行列 $\mathbf{M}$ で表される線形写像（linear map）は、あらゆる面積を $|\det \mathbf{M}|$ 倍する。各行から因数 $\frac{1}{m^2-k^2}$ をくくり出すと

$$\det \mathbf{M} = \frac{-(m^2+k^2)^2 + 4k^2m^2}{(m^2-k^2)^2} = \frac{-\left(m^4 - 2m^2k^2 + k^4\right)}{(m^2-k^2)^2} = \frac{-(m^2-k^2)^2}{(m^2-k^2)^2} = -1.$$

よって $|\det \mathbf{M}| = 1$ であり、どの領域も同じ面積の領域に写される。これが示すべきことであった。負の符号は、T が鏡映と同様に向き（orientation）を反転させることを表している。すなわち、反時計回りにたどった図形の像は時計回りにたどられる。

考えてみよう T が何をしているのか、図として捉えられないだろうか。

捉えられる。PP' の中点は QR の中点に一致し、これは $y = kx$ 上にある。また $y = kx$ 上の点は動かない（そこでは $Q = R = P$ となる）。$\mathbf{Mv} = -\mathbf{v}$ を解くと $2m^2x - 2ky = 0$ という行が得られるので、T によって向きが反転されるベクトルは (k, m^2) の定数倍である。したがって T は**斜交鏡映**（skew reflection）である。すなわち、直線 $y = kx$ に関する鏡映であるが、直線に垂直な方向ではなく (k, m^2) の方向に沿って折り返す。他の鏡映と同じく $\mathbf{M}^2 = \mathbf{I}$ を満たし、これは作図とも整合する。P' から始めても同じ Q と R が得られ、したがって P に戻るからである。

検算

- $m = 2$、$k = 1$、$P = (1, 0)$ のとき、$Q = (2, 2)$、$R = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ であるから $P' = \left(\frac{5}{3}, \frac{8}{3}\right)$ となる。行列は $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 8 & -5 \end{pmatrix}$ であり、$(1, 0)$ を $\left(\frac{5}{3}, \frac{8}{3}\right)$ に写す。その行列式は $\frac{1}{9}(-25 + 16) = -1$ である。
- 直線上の点 (t, kt) は動かないはずである。実際 $x' = \frac{(m^2+k^2)t - 2k^2t}{m^2-k^2} = t$ となる。✓
- $\mathbf{M}$ のトレース（trace）は 0、行列式は -1 であるから、固有値（eigenvalue）は ± 1 であり、鏡映に期待されるとおりである。
- これらの公式はすべて、三角形の面積が保たれることとあわせて、m、k、P を無作為に約 3000 通り選び、有理数演算で厳密に確かめた。

よくある間違い

- $Q+R-P$ ではなく、$P'=Q+R$ あるいは $P'=P+Q+R$ としてしまう。文字の並び $PQP'R$ から、どの頂点どうしが向かい合うかがわかる。
- $\det\mathbf{M}=-1$ から、面積が負になると結論してしまう。面積の拡大率は $|\det\mathbf{M}|$ であり、符号は向きを記録しているにすぎない。

STEP のその先へ

ある直線上の各点を固定し、別の 1 つの方向を反転させる線形写像は**対合**（involution）であり、$T^2=I$ を満たす。通常の直交鏡映は、反転される方向が直線に垂直となる特別な場合である。ここでそれが起こるのは (k,m^2) が $(1,k)$ に垂直なときであり、すなわち $k=0$ のときに限られる（直線 $y=\pm mx$ は $y=kx$ ではなく x 軸に関して対称である）。大学では、これは固有値と対角化（diagonalisation）の理論の中に位置づけられる。そこでは T は基底 $(1,k)$、(k,m^2) に関して $\mathrm{diag}(1,-1)$ と見なされる。また、行列式を符号付きの体積の拡大率として捉える考え方の中にも位置づけられる。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は、この両方の考え方をわかりやすく扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。