解答例

STEP III 1993、第 1 問

純粋数学 ・ 弧長と体積

STEP III 1993、問 1

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/93-s3-q1

鍵となる考え方

倍角の公式（double-angle formula）$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$ を使えば、媒介変数表示の曲線（parametric curve）はそのまま直交座標（Cartesian）による方程式に書き換えられる。そして θ の範囲から、放物線（parabola）のどの部分が得られるのかが正確にわかる。長さについては、$\sqrt{1+16x^2}$ は双曲線関数による置換（hyperbolic substitution）を使えという典型的な合図である。$1+\sinh^2 u = \cosh^2 u$ が成り立つからである。体積は、P の両端が回転軸（axis of rotation）上にあることに気づけば、通常の回転体の体積（volume of revolution）の問題になる。

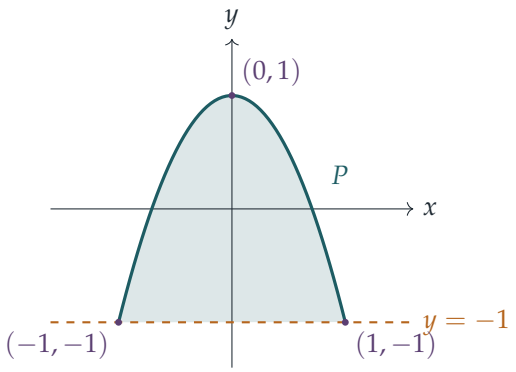
解答

曲線とその概形

$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$ かつ $x = \sin\theta$ であるから、

$$y = 1 - 2x^2.$$

したがって、P 上のすべての点は放物線 $y = 1 - 2x^2$ 上にある。θ が $-\pi/2$ から $\pi/2$ まで動くとき、$x = \sin\theta$ は -1 から 1 まで単調に増加し、各値をちょうど一度ずつとる。よって P は、この放物線のうち $-1 \le x \le 1$ の部分の弧にほかならない。P は $(-1,-1)$ から頂点（vertex）$(0,1)$ まで上り、再び $(1,-1)$ まで下る曲線であり、y 軸に関して対称である。



P の長さ

直交座標の形で考えると $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -4x$ であるから、

$$\text{長さ} = \int_{-1}^{1} \sqrt{1+16x^2}\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{1} \sqrt{1+16x^2}\,\mathrm{d}x,$$

となる。ここで、被積分関数（integrand）が偶関数（even function）であることを用いた。（媒介変数表示の公式 $\int \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,\mathrm{d}\theta$ を使っても、$x = \sin\theta$ と置換すれば同じ積分が得られる。）

考えてみよう どのような置換をすれば $\sqrt{1+16x^2}$ が簡単になるだろうか。

$16x^2$ を $\sinh^2$ の形にしたいので、$4x = \sinh u$ とおく。すると $4\,\mathrm{d}x = \cosh u\,\mathrm{d}u$ であり、$\sqrt{1+16x^2} = \cosh u$ となる（$\cosh u > 0$ であるから正である）。積分区間の端 $x = 0, 1$ は $u = 0$ と $u = \alpha$ に対応する。ただし $\alpha = \sinh^{-1} 4$ である。$\sinh\alpha = 4$、$\cosh\alpha = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$ であることに注意する。$\cosh^2 u = \frac{1}{2}(1+\cosh 2u)$ を用いると、

$$\begin{aligned} 2\int_0^1 \sqrt{1+16x^2}\,\mathrm{d}x &= 2\int_0^\alpha \cosh u \cdot \tfrac{1}{4}\cosh u\,\mathrm{d}u = \tfrac{1}{4}\int_0^\alpha (1+\cosh 2u)\,\mathrm{d}u \\ &= \tfrac{1}{4}\Big[u + \tfrac{1}{2}\sinh 2u\Big]_0^\alpha = \tfrac{1}{4}(\alpha + \sinh\alpha\cosh\alpha) \\ &= \tfrac{1}{4}(\sinh^{-1} 4 + 4\sqrt{17}). \end{aligned}$$

よって、P の長さは求めるとおり $\sqrt{17} + \frac{1}{4}\sinh^{-1} 4$ である。

体積

P の両端はともに直線 $y = -1$ 上にあるので、P をこの直線のまわりに回転させると閉曲面ができる。この曲面が囲む立体は、P と $y = -1$ の間の網掛け部分を回転させて得られる立体とちょうど一致する。位置 x における断面は半径

$$y - (-1) = 2 - 2x^2 = 2(1-x^2)\ (\geq 0、\text{ただし} |x| \leq 1).$$

の円板である。したがって

$$V = \pi \int_{-1}^{1} 4(1-x^2)^2 \,\mathrm{d}x = 8\pi \int_{0}^{1} (1 - 2x^2 + x^4)\,\mathrm{d}x$$
$$= 8\pi\left(1 - \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{5}\right) = 8\pi \cdot \tfrac{8}{15} = \frac{64\pi}{15}.$$

検算

- $\theta = 0$ のとき $(0,1)$、$\theta = \pm\pi/2$ のとき $(\pm 1, -1)$ が得られ、いずれも $y = 1 - 2x^2$ を満たす。
- 長さ $\sqrt{17} + \frac{1}{4}\sinh^{-1} 4 \approx 4.6468$ は、$(\pm 1, -1)$ から $(0,1)$ への 2 本の弦（chord）の長さの和 $2\sqrt{5} \approx 4.472$ より少し大きいはずである。実際そうなっている。また、$[-\pi/2, \pi/2]$ 上で $\int \sqrt{\cos^2\theta + 4\sin^2 2\theta}\,\mathrm{d}\theta$ を中点則（midpoint rule）で数値計算しても 4.64678 が得られる。
- パップスの定理（Pappus's theorem）：この領域の面積は $\int_{-1}^{1}(2 - 2x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{8}{3}$ であり、その重心（centroid）は回転軸から $\frac{4}{5}$ だけ上にある。よって $V = 2\pi \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{8}{3} = \frac{64\pi}{15} \approx 13.404$ となり、これも数値積分の結果と一致する。

よくある間違い

- 誤って x 軸のまわりに回転させ、半径として $y + 1$ ではなく y を使ってしまう。
- $\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\cosh u\,\mathrm{d}u$ に由来する係数 $\frac{1}{4}$ を忘れる。あるいは $\sinh 2\alpha$ を $2\sinh\alpha\cosh\alpha = 8\sqrt{17}$ と書き直さずに、簡単にしないまま残してしまう。

STEP のその先へ

弧長（arc length）は、曲線の微分幾何学（differential geometry）への最初の入り口である。曲線上の位置を弧長 s で測ると速さは常に 1 となり、s に対して向きがどれだけ速く変わるかを表すのが**曲率**（curvature）である。放物線 $y = 1 - 2x^2$ では、曲率は頂点で最大となる。上で用いたような双曲線関数による置換は、大学 1 年の微積分のいたるところに現れる。Siklos 著 *Advanced Problems in Mathematics* には、この種の問題がさらに数多く収録されている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。