解答例

STEP II 1993、第 9 問

純粋数学 • 複素数の偏角

> **STEP II 1993、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/93-s2-q9

鍵となる考え方

$0 \le \arg z < 2\pi$ という規約のもとでは、「虚部（imaginary part）が正」とは「偏角（argument）が 0 と π の間に厳密に含まれる」ということである。複素数の和はベクトルの和であり、すべて同じ開半平面（open half-plane）の中を向くベクトルの和は、その半平面の中にとどまる。z_1 または z_3 が実軸上にくるように回転させると、示すべき不等式はまさにこの事実に帰着する。最後の小問では、積の偏角は偏角の和（2π の整数倍の違いを除いて）であることを用いる。そして、すでに証明した不等式によって、その差は 0 と 2π の間に厳密に閉じ込められる。

解答

虚部が正であること

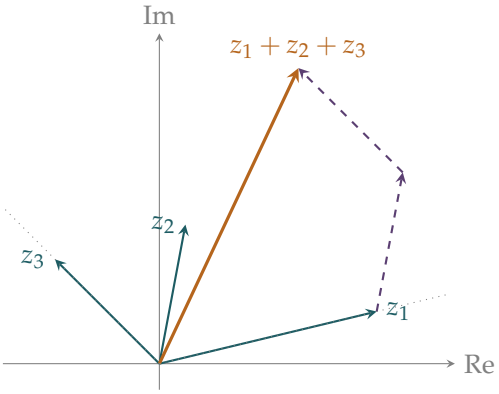
$r > 0$、$0 \le \theta < 2\pi$ として $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ とおく。このとき $\operatorname{Im} z = r\sin\theta > 0$ となるのはちょうど $\sin\theta > 0$ のときであり、$[0, 2\pi)$ においてこれが成り立つのはちょうど

$$0 < \arg z < \pi.$$

のときである。したがって z は上半平面にあり、その偏角が 0 や π になることはない（そうなると z は実数になってしまう）。

図

$\theta_k = \arg z_k$ とおくと、$0 < \theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < \pi$ である。z_1、z_2、z_3 を原点から出る矢印として描き、次にそれらを始点と終点をつないで並べ、$z_1 + z_2 + z_3$ に到達させる。



経路の各段は、直前の段に対して反時計回りに曲がり（$\theta_1 < \theta_2 < \theta_3$ だからである）、どの段も上半平面の方向を向いている。経路は角 θ_1 の半直線に沿って出発し、そこから左へ曲がるので、終点はその半直線より厳密に反時計回りの側にある。逆の端から振り返ると、経路は角 θ_3 の段で終わり、それ以前の部分はすべて角 θ_3 の半直線より時計回りの側にある。したがって和は、角 θ_1 と角 θ_3 の半直線にはさまれた扇形領域の中にある。

これを厳密にするために、全体に $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_1}$ を掛ける。これはすべてを時計回りに θ_1 だけ回転させる操作である：

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_1}(z_1+z_2+z_3) = r_1 + r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_2-\theta_1)} + r_3\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_3-\theta_1)},$$

ここで $r_k = |z_k| > 0$ である。第 1 項は正の実数であり、残りの 2 項は角が $(0,\pi)$ にあるので虚部が正である。よって右辺の虚部は正であり、その偏角 α は $0 < \alpha < \pi$ を満たす。したがって $z_1+z_2+z_3$ は偏角の一つとして $\theta_1+\alpha$ をもち、$\theta_1 < \theta_1+\alpha < \theta_1+\pi < 2\pi$ であるから、これが範囲 $[0,2\pi)$ における偏角である。ゆえに $\arg(z_1+z_2+z_3) > \theta_1$ である。

同様に、$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_3}$ を掛けると $r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1-\theta_3)} + r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_2-\theta_3)} + r_3$ となる。ここで最初の 2 つの角は $(-\pi,0)$ にあるので、これは虚部が負であり、$0 < \beta < \pi$ として $\rho\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta}$ と書ける。すると $z_1+z_2+z_3 = \rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_3-\beta)}$ であり、$-\pi < \theta_3-\beta < \theta_3 < \pi$ である。和は虚部が正なので、その偏角は $(0,\pi)$ にあり、$\theta_3-\beta$ とは 2π の整数倍だけ異なる。両者はともに長さ 2π の区間 $(-\pi,\pi)$ にあるので、等しい。よって $\arg(z_1+z_2+z_3) = \theta_3-\beta < \theta_3$ であり、以上を合わせて

$$\arg z_1 < \arg(z_1+z_2+z_3) < \arg z_3.$$

を得る。

積と和

$\varphi = \arg(z_1+z_2+z_3)$ とおくと、前の小問より $\theta_1 < \varphi < \theta_3$ である。複素数を掛けると偏角は加わるので、

$$z_1z_2z_3 = r_1r_2r_3\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2+\theta_3)},$$

であり、$\arg(z_1z_2z_3)$ は $[0,2\pi)$ に属する数のうち、$\theta_1+\theta_2+\theta_3$ と 2π の整数倍だけ異なるものである。

考えてみよう 和 $\theta_1+\theta_2+\theta_3$ は $(0,3\pi)$ のどこにでもなりうるので、2π の何倍を引けばよいかはわからない。それを知らずに済ませるにはどうすればよいか。

実は知る必要はない。必要なのは、もし $\arg(z_1z_2z_3) = \varphi$ ならば

$$D = \theta_1+\theta_2+\theta_3-\varphi$$

が 2π の整数倍になる、ということだけである。そこで $\theta_1 < \varphi < \theta_3$ を用いて D を評価する：

$$D > \theta_1+\theta_2+\theta_3-\theta_3 = \theta_1+\theta_2 > 0,$$
$$D < \theta_1+\theta_2+\theta_3-\theta_1 = \theta_2+\theta_3 < 2\pi,$$

1 行目では $\theta_k > 0$ を、2 行目では $\theta_k < \pi$ を用いた。よって $0 < D < 2\pi$ であり、0 と 2π の間に厳密に含まれる 2π の整数倍は存在しない。ゆえに $\arg(z_1z_2z_3)$ が $\arg(z_1+z_2+z_3)$ に等しくなることは決してない。

検算

図の例 $z_1 = 2.5+0.6\mathrm{i}$、$z_2 = 0.3+1.6\mathrm{i}$、$z_3 = -1.2+1.2\mathrm{i}$ では、偏角はそれぞれ約 0.236、1.385、2.356 であり、$\arg(z_1+z_2+z_3) = \arg(1.6+3.4\mathrm{i}) \approx 1.131$ は最初と最後の値の間にある。200 000 組のランダムな 3 つ組（絶対値（modulus）は e^{-4} から e^{4} の間）で試したところ、2 つの不等式と $0 < D < 2\pi$ はすべての場合に成り立ち、積と和が同じ方向を向くことは一度もなかった。

上半平面という条件がなぜ重要かを見るために、大小関係の条件を等号まで緩めて $z_1 = z_2 = z_3 = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}$ としてみよう。積は 1 であり、和は $\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}$ の方向を向く。これは $D = 4\pi/3$ と整合している。3 つの角をすべて π に近づけると D は 2π に近づくので、$\theta_k < \pi$ という評価は本質的な役割を果たしているのである。

よくある間違い

- いきなり $\arg(z_1z_2z_3) = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$ と書いてしまうこと。これは和が 2π 以上のときには誤りである。使えるのは 2π を法とする等式だけである。
- $\arg(z_1 + z_2 + z_3)$ が θ_k のある種の平均であると論じること。そうではない（絶対値が影響する）。正しいのは、それが θ_1 と θ_3 の間に厳密に含まれるということだけである。

STEP のその先へ

最初の事実は、開半平面（さらに一般に、角が π 未満の任意の扇形領域）が**凸錐**（convex cone）である、つまりその中のベクトルの正係数の結合はその中にとどまる、という主張である。凸錐は線形計画法（linear programming）や最適化（optimisation）において中心的な役割を果たす。また、最後の小問で回避した arg の多価性（multivaluedness）は、複素解析（complex analysis）の最初の講義で学ぶ分枝切断（branch cut）や複素対数（complex logarithm）へとつながっていく。Needham の *Visual Complex Analysis*（視覚的な複素解析入門）は、これら両方の考え方を幾何学的に扱った美しい本である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。