解答例

STEP II 1993、第 8 問

純粋数学 • 数学的帰納法による相加相乗平均の不等式

> **STEP II 1993、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/93-s2-q8

この問題は、*Beyond STEP* の第 3.2 節「**相加・相乗平均を逆向きに**」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch03/am-gm-backwards.html

鍵となる考え方

2 項の不等式は、平方が非負であるという事実にすぎない。2^m 項から 2^{m+1} 項へ進むには、並びを長さ 2^m の二つの半分に分け、それぞれに帰納法の仮定（induction hypothesis）を用い、さらに二つの半分の平均（mean）に 2 項の不等式を用いればよい。これで相加相乗平均の不等式（AM–GM inequality）が示されるのは項数が 2 の累乗のときだけである。最後の小問では、コーシー（Cauchy）による巧妙な工夫でその隙間を埋める。すなわち、並びにその平均自身のコピーを付け加えるのである。こうしても平均は変わらず、積についても本質的なことは何も変わらない。

解答

2 項の場合

展開すると、

$$\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2 - a_1a_2 = \frac{a_1^2+2a_1a_2+a_2^2-4a_1a_2}{4} = \left(\frac{a_1-a_2}{2}\right)^2 \geq 0,$$

となるので、$a_1a_2 \leq \left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2$ であり、等号が成り立つのはちょうど $a_1 = a_2$ のときである。これは**任意の**二つの正の数について成り立つことに注意しておく。以下では a_1 と a_2 以外の数に対してもこれを用いる。

帰納法

$P(m)$ を、2^m 個の正の数からなる任意の並びに対して $(*)$ が成り立つという命題とする。$m=1$ の場合は、いま証明した 2 項の不等式である。

次に $P(m)$ が成り立つと仮定し、2^{m+1} 個の正の数 $a_1,\dots,a_{2^{m+1}}$ をとる。$N=2^m$ とおき、これらをそれぞれ N 項からなる二つの半分に分け、その平均を

$$X=\frac{a_1+\cdots+a_N}{N},\qquad Y=\frac{a_{N+1}+\cdots+a_{2N}}{N}.$$

とする。それぞれの半分に $P(m)$ を適用すると、

$$a_1\cdots a_N\le X^N\qquad\text{かつ}\qquad a_{N+1}\cdots a_{2N}\le Y^N.$$

ここに現れる量はすべて正であるから、この二つの不等式を掛け合わせてよい：

$$a_1\cdots a_{2N}\le X^NY^N=(XY)^N.$$

さて X と Y は正であるから、2 項の不等式により $XY\le\left(\frac{X+Y}{2}\right)^2$ である。$t\mapsto t^N$ は $t>0$ で増加関数であるから、両辺を N 乗しても不等号の向きは変わらない：

$$(XY)^N\le\left(\frac{X+Y}{2}\right)^{2N}.$$

最後に、$\dfrac{X+Y}{2}=\dfrac{(a_1+\cdots+a_N)+(a_{N+1}+\cdots+a_{2N})}{2N}$ は $2N=2^{m+1}$ 個すべての数の平均である。以上の不等式をまとめると、

$$a_1\cdots a_{2^{m+1}}\le\left(\frac{a_1+\cdots+a_{2^{m+1}}}{2^{m+1}}\right)^{2^{m+1}},$$

となり、これは $P(m+1)$ である。数学的帰納法により、すべての正の整数 m に対して $(*)$ が成り立つ。

考えてみよう このように二つの不等式を掛け合わせてよいのだろうか？

$0<p\le q$ かつ $0<r\le s$ ならば、まず r の正値性、次に q の正値性を用いて $pr\le qr\le qs$ が得られる。正値性がなければこれは成り立たないことがある（たとえば $-3\le1$ かつ $-3\le1$ であるが $9>1$ である）。条件 $a_i>0$ が重要なのはこのためである。

2 の累乗まで補う

問題文の定義では $b_1=a_2$ となっているが、これは $b_1=a_1$ の誤植に違いない。そこで $1\le i\le n$ に対して $b_i=a_i$、$n<i\le2^m$ に対して $b_i=A$ とする。各 b_i は正である（A は正の数の平均だからである）。これらの和は

$$b_1+\cdots+b_{2^m}=(a_1+\cdots+a_n)+(2^m-n)A=nA+(2^m-n)A=2^mA,$$

であるから、b_i の平均はちょうど A である。これらの積は $a_1 \cdots a_n\, A^{2^m-n}$ である。したがって b_i に $(*)$ を適用すると

$$a_1 \cdots a_n\, A^{2^m-n} \le A^{2^m},$$

となり、求める不等式が得られる。

相加相乗平均の不等式

任意の正の整数 n に対して、$2^m > n$ となる m を選ぶ（$2^m \to \infty$ であるから可能である）。すると前の段階が適用できる。正の数 A^{2^m-n} で割ると

$$a_1 \cdots a_n \le A^n.$$

を得る。両辺は正であり、$t \mapsto t^{1/n}$ は $t > 0$ で増加関数であるから、n 乗根をとって

$$(a_1 \cdots a_n)^{1/n} \le A = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n},$$

となる。これが相加相乗平均の不等式である。（n がたまたま 2 の累乗であれば $(*)$ を直接引用してもよいが、$2^m > n$ と選んでおけば場合分けは不要である。）

検算

$n = 3$、$a = (1,2,6)$ で試してみる：$A = 3$ であり、$m = 2$ とすると補った並びは $(1,2,6,3)$ となる。その平均は 3、積は $36 \le 3^4 = 81$ である。3 で割ると $12 \le 27 = A^3$ となるので、$\sqrt[3]{12} \approx 2.29 \le 3$ である。また、a_i がすべて等しいときは、用いた不等式はすべて等式になり、これは当然そうあるべきである。$m \le 6$ について $(*)$ を、$n \le 40$ について最後の不等式を、何千もの無作為な並びに対して厳密な有理数演算でコンピュータで検証したところ、反例は見つからなかった。

よくある間違い

- 帰納法の仮定を 2^{m+1} 項すべてに一度に適用してしまう。仮定が扱うのは長さ 2^m の並びだけなので、半分に分けなければならない。
- 補った並びの平均が依然として A であることの確認を忘れる。ほかの値ではなく A で補う意味はまさにここにある。
- 量が正であることに触れずに n 乗根をとったり割り算をしたりする。

STEP のその先へ

この「前進・後退」型の帰納法は、相加相乗平均の不等式に対するコーシーの証明である。まず 2 の累乗について証明し、それからすべての n へと下りてくるのである。相加相乗平均の不等式は、凹関数（concave function）ln に対するイェンセンの不等式（Jensen's inequality）の特別な場合でもあり、べき平均の不等式、ヘルダー（Hölder）の不等式、ミンコフスキー（Minkowski）の不等式といった一群の不等式が同じ考え方から生まれる。これらは大学 1 年の解析学の基本的な道具である。Bartle and Sherbert, *Introduction to Real Analysis*（実解析入門）は最初からこうした不等式を用いており、Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題）には STEP 形式の演習問題がさらに収められている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。