解答例

STEP II 1993、第 6 問

純粋数学 ・ 行列代数の反例

> **STEP II 1993、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/93-s2-q6

この問題は、*Beyond STEP* の第 7.1 節「行列では成り立たない法則」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch07/matrix-rules.html

鍵となる考え方

各主張は実数についてなら成り立つことばかりである。したがってこの問題が本当に問うているのは、通常の代数で身についた習慣のうち、どれが行列でも通用するかということである。破綻する点は 2 つある。行列の積は可換（commutative）とは限らないこと、そして零でない 2 つの行列の積が零になりうることである。ごく単純な行列の組をうまく 1 つ選べば (i) と (ii) が片づき、余因子行列（adjugate matrix）で (iii) が片づき、冪零（nilpotent）というひねりを加えた重「根」（repeated root）で (iv) が片づく。

解答

以下、$\mathbf{I}$ は 2×2 の単位行列（identity matrix）、$\mathbf{0}$ は零行列（zero matrix）を表す。

小問 (i)

偽である。次のようにとる。

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

いずれも零行列ではない。このとき

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}.$$

考えてみよう このような反例（counterexample）を、当て推量ではなく、どのようにして見つければよいだろうか？

$\mathbf{AB} = \mathbf{0}$ としたいので、$\mathbf{B}$ のすべての列は $\mathbf{A}$ によって消されなければならない。上の行列 $\mathbf{A}$ は $(0, y)^{\mathsf{T}}$ の形のベクトルをすべて消すので、$\mathbf{B}$ の列をその形にとればよい。あとは $\mathbf{BA}$ がたまたま零になるかどうかを確かめるだけである。最も素直な選び方では、零にはならない。

小問 (ii)

偽である。 各積の順序を保ったまま注意深く展開すると

$$(\mathbf{A} - \mathbf{B})(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{A}^2 + \mathbf{AB} - \mathbf{BA} - \mathbf{B}^2,$$

となるので、この主張が成り立つのはちょうど $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ のときである。小問 (i) の行列は可換でないので、反例となる。実際、そこでは $\mathbf{AB} - \mathbf{BA} = -\mathbf{BA} \neq \mathbf{0}$ である。具体的には

$$(\mathbf{A} - \mathbf{B})(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

である。ここで $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$ と $\mathbf{B}^2 = \mathbf{0}$ を用いた。

小問 (iii)

真である。 両方向を証明する。

$\mathbf{AX} = \mathbf{0}$ が零でない解をもつならば、$\det \mathbf{A} = 0$ である。 対偶（contrapositive）を証明する。$\det \mathbf{A} \neq 0$ と仮定する。すると $\mathbf{A}^{-1}$ が存在し、$\mathbf{AX} = \mathbf{0}$ から $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{AX} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}$ が得られる。よって解は零行列のみである。

$\det \mathbf{A} = 0$ ならば、零でない解が存在する。

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

とおく（つまり $\mathbf{X}$ は $\mathbf{A}$ の余因子行列である）。積を計算すると

$$\mathbf{AX} = \begin{pmatrix} ad - bc & -ab + ba \\ cd - dc & -cb + da \end{pmatrix} = (\det \mathbf{A})\,\mathbf{I} = \mathbf{0}.$$

$\mathbf{X}$ の成分は $\mathbf{A}$ の成分を並べ替え、いくつかの符号を変えたものであり、$\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ であるから $\mathbf{X} \neq \mathbf{0}$ である。以上で証明が完了する。ここで仮定 $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ が使われていることに注意しよう。余因子行列が零でないことを保証しているのが、この仮定である。

小問 (iv)

偽である。数の場合、2 次方程式の根は高々 2 個である。しかしその事実の証明には「$pq = 0$ ならば $p = 0$ または $q = 0$」が使われており、これは小問 (i) でちょうど示したように、行列では成り立たない。そこで、完全平方の形に因数分解される 2 次式を探す。$\mathbf{A} = -2\mathbf{I}$、$\mathbf{B} = \mathbf{I}$ とおく。いずれも零行列ではない。$\mathbf{I}$ はあらゆる行列と可換なので

$$\mathbf{X}^2 - 2\mathbf{X} + \mathbf{I} = (\mathbf{X} - \mathbf{I})^2,$$

となり、$(\mathbf{X} - \mathbf{I})^2 = \mathbf{0}$ となればよい。$\mathbf{N}^2 = \mathbf{0}$ を満たす任意の行列 $\mathbf{N}$ を $\mathbf{X} - \mathbf{I}$ としてとればよく、そのような行列は無数にある。各実数 t に対して

$$\mathbf{X}_t = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

と定める。このとき

$$\mathbf{X}_t^2 - 2\mathbf{X}_t + \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 2t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2t \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

各 $\mathbf{X}_t$ は零行列ではなく、t の値が異なれば行列も異なる。よってこの方程式の解は、高々 2 個どころか無数に存在する。

> **考えてみよう** $\mathbf{A} = -2\mathbf{I}$、$\mathbf{B} = \mathbf{I}$ という選び方に、何か特別な意味はあるだろうか？

特にない。$\mathbf{A} = -2\lambda\mathbf{I}$、$\mathbf{B} = \lambda^2\mathbf{I}$（$\lambda \neq 0$ は任意）とすれば、$\mathbf{N}^2 = \mathbf{0}$ を満たすすべての $\mathbf{X} = \lambda\mathbf{I} + \mathbf{N}$ が解となる。冪零行列そのものも大きな族をなしている。実際、$\begin{pmatrix} pq & -p^2 \\ q^2 & -pq \end{pmatrix}$ はすべての実数 p、q に対して、2 乗すると $\mathbf{0}$ になる。本質的なのは、2 次式が 2 つの行列の積に因数分解されるという点だけであり、そのような積は、数の場合よりもはるかに多くの仕方で零になりうるのである。

検算

各反例を手で計算して確かめよ。(i) では、$\mathbf{AB}$ の成分はすべて 0 であるのに対し、$\mathbf{BA}$ は左下の成分が 1 である。恒等式 $(\mathbf{A} - \mathbf{B})(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2 + \mathbf{AB} - \mathbf{BA}$ はランダムな整数行列の組 1000 組で検証し、$\mathbf{A}\,\mathrm{adj}\,\mathbf{A} = \mathbf{0}$ かつ $\mathrm{adj}\,\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ であることはランダム

な特異行列 2000 個で検証した。(iv) では $t = 3$ を試すとよい。$\mathbf{X}_3^2 = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ であり、$\mathbf{X}_3^2 - 2\mathbf{X}_3 + \mathbf{I} = \mathbf{0}$ となる。

よくある間違い

- $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ であるかのように $(\mathbf{A} - \mathbf{B})(\mathbf{A} + \mathbf{B})$ を展開してしまう。また (ii) で具体的な反例を示さずに「偽」と書くだけでは、ほとんど得点にならない。問題は反例を求めているからである。
- (iii) で、「必要十分」の一方向しか証明しない。
- (iv) で、解の公式や因数分解によって 2 次方程式を「解き」、$\mathbf{X} = \mathbf{I}$ が唯一の根であると結論してしまう。因数分解すること自体は問題ないが、$\mathbf{P}^2 = \mathbf{0}$ から $\mathbf{P} = \mathbf{0}$ は導かれない。

STEP のその先へ

2×2 の実行列全体は**零因子をもつ非可換環**（non-commutative ring with zero divisors）をなす。この問題の各小問は、体（field）では成り立つがそのような環では成り立たない法則を試している。小問 (iii) は、線形代数（linear algebra）の中心的な定理の 2×2 の場合である。すなわち、正方行列が自明でない零空間（null space）をもつのは、ちょうどその行列式（determinant）が零になるときである。(iv) のような $\mathbf{N}^2 = \mathbf{0}$ を満たす行列は冪零行列と呼ばれ、ジョルダン標準形（Jordan normal form）の鍵となる要素である。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra* は線形代数を、Allenby の *Rings, Fields and Groups* は環論を扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。