解答例

STEP II 1993、第 5 問

純粋数学 • 極方程式の曲線と弧長

> **STEP II 1993、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/93-s2-q5

鍵となる考え方

R における直角のおかげで、小さな三角形 PQR のすべての辺の長さを、直角三角形 ORQ から OQ と小さな角 $\delta\theta$ だけを用いて読み取ることができる。$Q \to P$ の極限（limit）をとると、弦 PQ は接線（tangent）になる。らせんでは $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta$ が r の定数倍なので、$r\,\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}r$ はどこでも同じ値をとり、弧長（arc length）の被積分関数は単なる指数関数になる。

解答

曲線と動径のなす角

点 R は直線 OP（の延長）上にあり、$\angle ORQ$ は直角である。直角三角形 ORQ において、斜辺は $OQ = r + \delta r$、O における角は $\delta\theta$ であるから、

$$QR = (r+\delta r)\sin\delta\theta, \qquad OR = (r+\delta r)\cos\delta\theta.$$

$OP = r$ であるから、$PR = OR - OP = (r+\delta r)\cos\delta\theta - r$ である。三角形 PRQ は R で直角をなすので、

$$\tan\angle QPR = \frac{QR}{PR} = \frac{(r+\delta r)\sin\delta\theta}{(r+\delta r)\cos\delta\theta - r}.$$

$\delta\theta$ が小さいとき $\sin\delta\theta = \delta\theta + O(\delta\theta^3)$、$\cos\delta\theta = 1 + O(\delta\theta^2)$ であるから、

$$\tan\angle QPR = \frac{r\,\delta\theta + \delta r\,\delta\theta + \cdots}{\delta r + O(\delta\theta^2)} = \frac{r\dfrac{\delta\theta}{\delta r} + \delta\theta + \cdots}{1 + O\left(\dfrac{\delta\theta^2}{\delta r}\right)},$$

となる。ここで省略記号の部分は、書き出した項に比べて小さい項である。$Q \to P$ のとき、δr と $\delta\theta$ はともに 0 に近づき、$\delta\theta/\delta r \to \mathrm{d}\theta/\mathrm{d}r$ となる。よって $\delta\theta^2/\delta r = \delta\theta \cdot (\delta\theta/\delta r) \to 0$ であり、また $\delta\theta \to 0$ でもある。したがって

$$\tan\angle QPR \to r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r}.$$

考えてみよう なぜ $\angle QPR$ の極限が、曲線が OP と交わる角になるのか？

角 QPR は、弦 PQ と点 P を通る動径（radius line）とのなす角である。曲線に沿って $Q \to P$ とすると、弦 PQ は P における接線になる。したがって極限において $\angle QPR$ は接線と OP のなす角となり、これがまさに「曲線が OP と交わる角」の意味である。よってその角は

$$\tan^{-1}\left(r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r}\right),$$

であり、題意は示された。

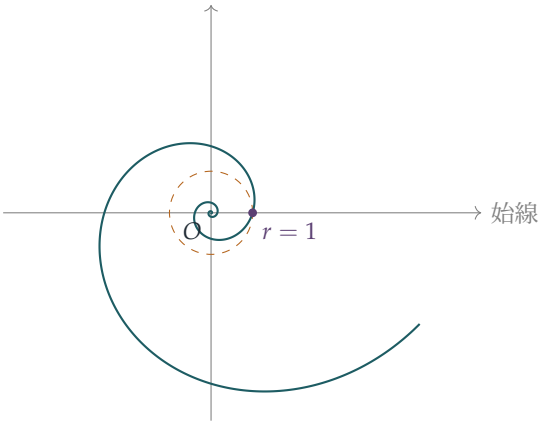
等角らせん

$r = \mathrm{e}^{\theta\cot\alpha}$ に対して、

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \cot\alpha\,\mathrm{e}^{\theta\cot\alpha} = r\cot\alpha, \qquad \text{よって} \qquad r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r} = \frac{r}{r\cot\alpha} = \tan\alpha.$$

$0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$ であるから、角 α は $\tan^{-1}$ の値域に含まれ、$\tan^{-1}(\tan\alpha) = \alpha$ となる。これは θ によらないので、等角らせん（equiangular spiral）はすべての点において、どの動径とも角 α で交わる。

概形。$\cot\alpha > 0$ であるから、r は θ とともに単調に増加する。1 周するごとに r は一定の倍率 $\mathrm{e}^{2\pi\cot\alpha}$ 倍になる。$\theta \to -\infty$ のとき $r \to 0$ であるから、曲線は原点に到達することなく、その周りを無限回巻きつく。$\theta \to +\infty$ のときは、反時計回りに外側へ渦を巻いて広がっていく。曲線は $\theta = 0$ のとき、$r = 1$ で始線と交わる。図では $\cot\alpha = 0.3$ としている。



破線の円は $r=1$ である。その内側にあるらせんの部分が、内向きに無限に巻いている部分である。

弧長

与えられた公式と $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta = r\cot\alpha$ を用いると、

$$\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 = r^2 + r^2\cot^2\alpha = r^2\operatorname{cosec}^2\alpha, \qquad \text{よって} \qquad \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{e}^{\theta\cot\alpha}}{\sin\alpha},$$

となる。ここで、s は θ とともに増加し、$\sin\alpha > 0$ であるから、正の平方根をとった。

$r=1$ から始まり外側へ向かう 1 周は、$\theta=0$ から $\theta=2\pi$ までである。その長さは

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{\theta\cot\alpha}}{\sin\alpha}\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{\sin\alpha}\cdot\frac{\mathrm{e}^{2\pi\cot\alpha}-1}{\cot\alpha} = \sec\alpha\left(\mathrm{e}^{2\pi\cot\alpha}-1\right).$$

$r \le 1$ の部分は $\theta \le 0$、すなわち $-\infty < \theta \le 0$ である。その長さは広義積分（improper integral）

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{\mathrm{e}^{\theta\cot\alpha}}{\sin\alpha}\,\mathrm{d}\theta = \lim_{T\to\infty}\frac{1-\mathrm{e}^{-T\cot\alpha}}{\sin\alpha\cot\alpha} = \sec\alpha,$$

で与えられる。$\cot\alpha > 0$ より $\mathrm{e}^{-T\cot\alpha} \to 0$ となるからである。したがって、この部分は原点の周りを無限回巻いているにもかかわらず、その全長は有限であり、$\sec\alpha$ に等しい。

検算

- $\alpha \to \frac{1}{2}\pi$ のとき $\cot\alpha \to 0$ となり、らせんは単位円になる。単位円はどの動径とも直角に交わる。1 周の長さは $\sec\alpha(\mathrm{e}^{2\pi\cot\alpha}-1) \approx \sec\alpha\cdot 2\pi\cot\alpha = 2\pi\operatorname{cosec}\alpha \to 2\pi$ となり、円周の長さに一致する。

- $\sec\alpha$ のきれいな幾何的検算：らせんに沿って任意の点から原点までの長さは $r\sec\alpha$ であり、これはその点から、O を通り OP に垂直な直線までの接線の線分の長さに等しい。
- 数値的には、$\alpha = 0.9$ として 2×10^5 本の弦の長さを足し合わせると、1 周の長さは 233.8349、内側の部分の長さは 1.608726 となる。これらは $\sec\alpha(e^{2\pi\cot\alpha}-1)$ および $\sec\alpha$ と、少なくとも有効数字 8 桁まで一致する。

よくある間違い

- 理由を説明せずに $PR=\delta r$、$QR = r\,\delta\theta$ と書いてしまう。どちらも 1 次の近似としてしか成り立たず、この問題が試しているのはまさにその極限の議論である。
- 内側の部分について、$(-\infty, 0]$ ではなく $[0, 2\pi]$ で積分してしまう。$r \le 1$ の部分は 1 周ではなく、無限に多くの周回からなる。

STEP のその先へ

等角らせん（対数らせん（logarithmic spiral）とも呼ばれる）は自己相似（self-similar）である。$e^{2\pi\cot\alpha}$ 倍、あるいは任意の倍率で拡大すると、同じ曲線を回転させたものが得られる。複素数を用いると $z = e^{(\cot\alpha+i)\theta}$ と表され、これは指数写像による直線の像である。角が一定であることは、exp が等角写像（conformal、角を保つ写像）であることから従う。Needham の *Visual Complex Analysis*（視覚的に学ぶ複素解析）は、この描像を見事に展開している。無限に巻いた曲線の長さが有限であるという事実は、解析学の最初の講義で出会う広義積分や収束の問題への最初の入り口である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。