解答例

STEP II 1993、第 4 問

純粋数学 • ねじれの位置にある直線と最短距離

> **STEP II 1993、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/93-s2-q4

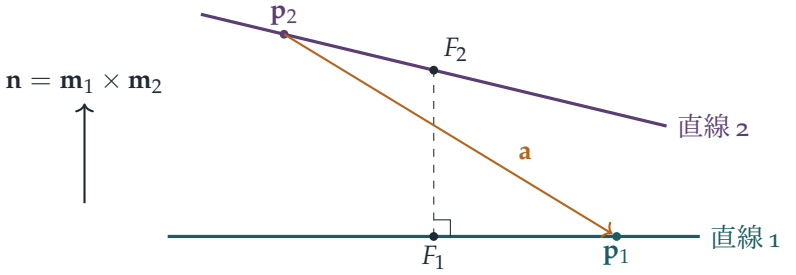
鍵となる考え方

一方の直線上の点と他方の直線上の点を結ぶベクトルは、どれも共通法線（common normal）$\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2$ 方向の成分が等しい。どちらの直線に沿って動いても、加わるのは $\mathbf{m}_1$ と $\mathbf{m}_2$ の実数倍だけであり、それらはこの法線に垂直だからである。この一定の成分こそが最短距離（shortest distance）である。航空機の問題では、A_2 から見た座標系で考えるのがうまいやり方である。A_2 から A_1 へのベクトルは**ただ一本の**直線に沿って動くので、最接近距離は点と直線の距離になる。

解答

2 直線間の最短距離

$\mathbf{a} = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2$、$\mathbf{n} = \mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2$ とおく。2 直線は平行でないので $\mathbf{n}$ は零ベクトルではなく、$\mathbf{m}_1$ と $\mathbf{m}_2$ の両方に垂直である。



図には、2 本の直線（ねじれの位置（skew）にあり、交わらない）、$\mathbf{p}_2$ から $\mathbf{p}_1$ へのベ

クトル $\mathbf{a}$、そして $\mathbf{n}$ に平行な共通垂線（common perpendicular）F_1F_2 を示している。

直線 2 上の点から直線 1 上の点への一般のベクトルは

$$\mathbf{d} = \mathbf{a} + t_1\mathbf{m}_1 - t_2\mathbf{m}_2.$$

である。$\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n} = 0$ であるから、単位法線ベクトル（unit normal）$\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{n}/|\mathbf{n}|$ 方向の成分は

$$\mathbf{d} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{n}},$$

となり、t_1, t_2 をどう選んでも変わらない。ベクトルの長さはそのどの成分の大きさ以上でもあるので $|\mathbf{d}| \geq |\mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{n}}|$ が成り立ち、等号が成立するのは $\mathbf{d}$ が $\mathbf{n}$ に平行なときに限る。そして等号は実際に成立する。$\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \mathbf{n}$ は同一平面上にないので基底（basis）をなし、$\mathbf{a} = \alpha\mathbf{m}_1 + \beta\mathbf{m}_2 + \gamma\mathbf{n}$ と書ける。$t_1 = -\alpha$、$t_2 = \beta$ と選べば $\mathbf{d} = \gamma\mathbf{n}$ が残る。この選び方が図の垂線の足 F_1, F_2 を与える。図でいえば、最短距離は $\mathbf{a}$ の $\mathbf{n}$ 方向の「高さ」である。したがって最短距離は

$$|\mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{n}}| = \frac{|(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \cdot (\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2)|}{|\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2|}.$$

である。

小問 (i)

ここでは $\mathbf{a} = (1,1,1)$ である。$\mathbf{m}_1$ と $\mathbf{m}_2$ をそれぞれ零でない実数倍に置き換えても、その因子は分子と分母で約分されるので公式は変わらない。そこで $(4,3,0)$ と $(0,-3,1)$ を用いてよい。

$$(4,3,0) \times (0,-3,1) = (3,-4,-12), \qquad |(3,-4,-12)| = \sqrt{9+16+144} = 13.$$

すると $(1,1,1) \cdot (3,-4,-12) = -13$ であるから、最短距離は $13/13 = 1$ である。

小問 (ii)

時刻 t において航空機はそれぞれ $\mathbf{p}_1 + v_1 t\,\mathbf{m}_1$ と $\mathbf{p}_2 + v_2 t\,\mathbf{m}_2$ にあるので、A_2 から A_1 へのベクトルは

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{w}, \qquad \mathbf{w} = v_1\mathbf{m}_1 - v_2\mathbf{m}_2.$$

である。$\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2$ は平行でないので、（両方の速さが 0 でない限り）$\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ である。飛行は $t = 0$ の前後を含むすべての時刻にわたるものとする。このとき

$$|\mathbf{r}(t)|^2 = |\mathbf{a}|^2 + 2t\,\mathbf{a} \cdot \mathbf{w} + t^2|\mathbf{w}|^2,$$

は最高次の係数が正の t の 2 次式である。平方完成（completing the square）すると

$$|\mathbf{r}(t)|^2 = |\mathbf{w}|^2\Big(t + \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{w}}{|\mathbf{w}|^2}\Big)^2 + |\mathbf{a}|^2 - \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{w})^2}{|\mathbf{w}|^2},$$

となるので、$t = -\mathbf{a}\cdot\mathbf{w}/|\mathbf{w}|^2$ における最小値は

$$d^2 = \frac{|\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2|^2\,|v_1\mathbf{m}_1 - v_2\mathbf{m}_2|^2 - [(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2)\cdot(v_1\mathbf{m}_1 - v_2\mathbf{m}_2)]^2}{|v_1\mathbf{m}_1 - v_2\mathbf{m}_2|^2},$$

であり、これが示すべき式である。幾何学的には、d は原点と直線 $\mathbf{r} = \mathbf{a} + t\mathbf{w}$ の距離であり、θ を $\mathbf{a}$ と $\mathbf{w}$ のなす角として $|\mathbf{a}|\sin\theta$ に等しい。

小問 (iii)

まず、計算をしなくても得られる評価がある。どの瞬間にも A_1 は直線 1 上に、A_2 は直線 2 上にあるので、小問 (i) より $d \geq 1$ である。等号が成り立つには、両方の航空機が**同時に**垂線の足 F_1、F_2 にいなければならない。

考えてみよう A_2 のパイロットは本当にそうなるように飛べるだろうか？

垂線の足を求めよう。$\mathbf{a} + t_1\mathbf{m}_1 - t_2\mathbf{m}_2$ が $\mathbf{m}_1$ と $\mathbf{m}_2$ に垂直であるという条件を、$\mathbf{a}\cdot\mathbf{m}_1 = \frac{7}{5}$、$\mathbf{a}\cdot\mathbf{m}_2 = -\frac{2}{\sqrt{10}}$、$\mathbf{m}_1\cdot\mathbf{m}_2 = -\frac{9}{5\sqrt{10}}$ を用いて書き、2 つの連立 1 次方程式を解くと

$$t_1 = -\tfrac{20}{13}, \qquad t_2 = \tfrac{\sqrt{10}}{13}.$$

を得る。A_1 が F_1 にいるのは時刻 $t_1/v_1 < 0$ であるが、$v_2 > 0$ のとき A_2 が F_2 にいるのは時刻 $t_2/v_2 > 0$ である。これらが一致することはありえない。F_1 は $\mathbf{p}_1$ の後方にあり、F_2 は $\mathbf{p}_2$ の前方にあるからである。したがって A_2 が $\mathbf{m}_2$ の向きに飛ぶ限り、値 $d = 1$ には到達できない。どこまで到達できるかを調べるため、小問 (ii) を用いる。

$v_2 = \sqrt{10}\,\lambda v_1$ とおく。λ は尺度を調整した速さの比である。すると

$$\mathbf{w} = v_1\left(\tfrac{1}{5}(4,3,0) - \lambda(0,-3,1)\right) = \tfrac{v_1}{5}(4,\ 3+15\lambda,\ -5\lambda),$$

となり、因子 $\frac{v_1}{5}$ は d^2 の公式から約分される。$|\mathbf{a}|^2 = 3$ と

$$\mathbf{a}\cdot(4,3+15\lambda,-5\lambda) = 7+10\lambda, \qquad |(4,3+15\lambda,-5\lambda)|^2 = 25+90\lambda+250\lambda^2,$$

より

$$d^2 = 3 - \frac{(7+10\lambda)^2}{25+90\lambda+250\lambda^2} = \frac{26+130\lambda+650\lambda^2}{25+90\lambda+250\lambda^2} = \frac{26}{5}\cdot\frac{1+5\lambda+25\lambda^2}{5+18\lambda+50\lambda^2}.$$

である。最後の分数 N/D を微分すると、導関数の分子は次のように簡単になる。

$$\begin{aligned} N'D - ND' &= (5+50\lambda)(5+18\lambda+50\lambda^2) - (1+5\lambda+25\lambda^2)(18+100\lambda) \\ &= 7+150\lambda+200\lambda^2 = (1+20\lambda)(7+10\lambda). \end{aligned}$$

よって、すべての実数 λ の関数として、d^2 は $\lambda = -\frac{7}{10}$ で極大（このとき $\mathbf{a} \perp \mathbf{w}$ かつ $d = \sqrt{3}$）、$\lambda = -\frac{1}{20}$ で極小となり、極小値は

$$d^2 = \frac{26}{5} \cdot \frac{1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16}}{5 - \frac{9}{10} + \frac{1}{8}} = \frac{26}{5} \cdot \frac{13/16}{169/40} = 1.$$

である。これは評価 $d = 1$ そのものであり、$v_2 = -\frac{v_1}{2\sqrt{10}}$ のときに達成される。これは垂線の足から得られる t_2/t_1 と一致する。

したがって、2 つの航空機は 2 直線間の最短距離 $d = 1$ まで近づくことができ、それ以上は近づけない。これを実現するには、A_2 のパイロットは直線 2 に沿って $-\mathbf{m}_2$ の向きに速さ $\frac{v_1}{2\sqrt{10}}$ で飛べばよい。問題文の記法でいえば $v_2 = -\frac{v_1}{2\sqrt{10}}$ であり、これは速さではなく $\mathbf{m}_2$ 方向の速度である。このとき両方の航空機は同じ瞬間に共通垂線の足に到達する。これは小問 (i) の答えを再現しており、おそらく出題者が意図したのはこの答えであろう。答えが比 v_2/v_1 のみに依存することにも注意しよう。

正の速さについての注意。 v_2 が本当に速さでなければならない、すなわち $v_2 > 0$ かつ $\lambda > 0$ であるとすると、$(1 + 20\lambda)(7 + 10\lambda) > 0$ であり、d^2 は v_2 について狭義単調増加である。

$$d^2 \to \frac{26}{25} \quad \text{ただし} v_2 \to 0^+, \qquad d^2 \to \frac{13}{5} \quad \text{ただし} v_2 \to \infty.$$

この解釈では最適な速さは存在しない。パイロットはゆっくり飛ぶほど有利になり、最接近距離は $\mathbf{p}_2$ と直線 1 の距離である $\frac{\sqrt{26}}{5} \approx 1.020$ にいくらでも近づけられるが、決してそれに到達することはない。

検算

- 小問 (i) の共通垂線：$t_1 = -\frac{20}{13}$、$t_2 = \frac{\sqrt{10}}{13}$ のとき、結ぶベクトルは $\frac{1}{13}(-3, 4, 12)$ であり、これは $(3, -4, -12)$ に平行で、長さはちょうど 1 である。
- コンピュータで、ランダムな速さに対して $|\mathbf{r}(t)|$ を直接探索により最小化したところ、小問 (ii) の公式と 10^{-6} の精度で一致した。また v_2/v_1 を $[-2, 2]$ の範囲で走査したところ、最小値は $v_2/v_1 \approx -0.1581 = -1/(2\sqrt{10})$ における $d^2 = 1.0000$ であり、$v_2 > 0$ では d^2 は 1.04 から増加した。
- 極端な場合：$v_2 = 0$ とすると A_2 は $\mathbf{p}_2$ に固定された点となり、$3 - (\frac{7}{5})^2 = \frac{26}{25}$ は確かに $\mathbf{p}_2$ と直線 1 の距離の 2 乗である。

よくある間違い

- 両方の航空機が同じ瞬間に共通垂線の足に到達できるかを確かめずに、小問 (iii) に「小問 (i) より 1」と答えてしまう。
- 小問 (ii) の公式が $\mathbf{w}$ の定数倍で変わらないことを忘れ、何ページにもわたる計算で v_1 を持ち回ってしまう。
- 直線間の距離の公式で絶対値を落とし、-1 を得てしまう。

STEP のその先へ

小問 (ii) は**正射影**（orthogonal projection）の小さな例である。d は $\mathbf{a}$ の $\mathbf{w}$ に垂直な成分の長さであり、$|\mathbf{a}|^2|\mathbf{w}|^2 - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{w})^2 = |\mathbf{a}\times\mathbf{w}|^2$ はグラム行列式（Gram determinant）、すなわち $\mathbf{a}$ と $\mathbf{w}$ が張る平行四辺形の面積の 2 乗である。大学初年次の線形代数で学ぶ最小二乗法（least squares）によるあてはめも、同じ射影の考え方に基づいている。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は、この考え方を見事に展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。