解答例

STEP II 1993、第 3 問

純粋数学 • リッカチ微分方程式

STEP II 1993、問 3

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/93-s2-q3

鍵となる考え方

どちらの方程式も y^2 の項のために非線形（nonlinear）であり、標準的な一階（first-order）微分方程式の解法はどれもそのままでは適用できない。置換（substitution）は、この y^2 の項を消すように設計されている。(i) では、y を u'/u の定数倍として表すと二乗の項が打ち消し合い、定数係数（constant coefficients）の線形二階微分方程式が残る。(ii) では、$y = 1/x$ がたまたま厳密な解になっており、$y = 1/x + 1/v$ とおくと方程式は v についての線形一階微分方程式になる。これは積分因子（integrating factor）を用いて解ける。

解答

小問 (i)

$y = -\dfrac{u'}{3u}$ とおく。ただし $u' = \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ である。商の微分法（quotient rule）により、

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{u''}{3u} + \frac{(u')^2}{3u^2}, \qquad \text{また} \qquad 3y^2 = 3 \cdot \frac{(u')^2}{9u^2} = \frac{(u')^2}{3u^2}.$$

よって厄介な項は打ち消し合う：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 3y^2 = -\frac{u''}{3u}.$$

したがって、方程式 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - y - 3y^2 = -2$ は

$$-\frac{u''}{3u} + \frac{u'}{3u} = -2.$$

となる。$-3u$ を掛けると（$u \neq 0$ とする。これは y が定義されるためにもともと必要な条件である）、

$$u'' - u' - 6u = 0.$$

を得る。特性方程式（auxiliary equation）は $m^2 - m - 6 = (m-3)(m+2) = 0$ であるから、$m = 3$ または $m = -2$ であり、

$$u = A\mathrm{e}^{3x} + B\mathrm{e}^{-2x}$$

となる。ここで A と B は定数で、両方が同時に零になることはない。このとき $u' = 3A\mathrm{e}^{3x} - 2B\mathrm{e}^{-2x}$ であり、

$$y = -\frac{u'}{3u} = \frac{2B\mathrm{e}^{-2x} - 3A\mathrm{e}^{3x}}{3\left(A\mathrm{e}^{3x} + B\mathrm{e}^{-2x}\right)}.$$

考えてみよう 一階微分方程式の解には任意定数（arbitrary constant）が一つだけ含まれるはずである。なぜここでは二つあるのだろうか。

意味をもつのは A と B の比だけである。u に零でない定数を掛けても u'/u は変わらないからである。$A \neq 0$ ならば、分子と分母を $A\mathrm{e}^{3x}$ で割り、$K = B/A$ とおくと、

$$y = \frac{2K\mathrm{e}^{-5x} - 3}{3\left(1 + K\mathrm{e}^{-5x}\right)} = \frac{2K - 3\mathrm{e}^{5x}}{3\left(\mathrm{e}^{5x} + K\right)},$$

となる。ここで K は任意定数である。$A = 0$ の場合は定数解（constant solution）$y = \frac{2}{3}$ が得られ、これは $K \to \infty$ としたときのこの解の族の極限である。$K = 0$ とすると、もう一つの定数解 $y = -1$ が得られる。検算として、定数解は $-y - 3y^2 = -2$、すなわち $(3y-2)(y+1) = 0$ を満たしている。

小問 (ii)

$y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{v}$ とおく。すると

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{x^2} - \frac{v'}{v^2},$$

であるから、

$$x^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -1 - \frac{x^2v'}{v^2},$$
$$xy = 1 + \frac{x}{v},$$
$$x^2y^2 = x^2\left(\frac{1}{x^2} + \frac{2}{xv} + \frac{1}{v^2}\right) = 1 + \frac{2x}{v} + \frac{x^2}{v^2}.$$

これら三行を足し合わせると、方程式 $x^2y' + xy + x^2y^2 = 1$ は

$$1 - \frac{x^2v'}{v^2} + \frac{3x}{v} + \frac{x^2}{v^2} = 1, \qquad \text{すなわち} \qquad -\frac{x^2v'}{v^2} + \frac{3x}{v} + \frac{x^2}{v^2} = 0.$$

となる。v^2/x^2 を掛けると（方程式から要請されるとおり $x \neq 0$ とする）、線形方程式

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} - \frac{3}{x}v = 1.$$

を得る。積分因子は $\exp\left(-\int \frac{3}{x}\,\mathrm{d}x\right) = x^{-3}$ である（区間 $x > 0$ と $x < 0$ のどちらにおいても成り立つ。積分因子の定数倍もまた積分因子として同じように使えるので、絶対値記号（modulus sign）は外してよい）。よって

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{v}{x^3}\right) = \frac{1}{x^3} \quad\Longrightarrow\quad \frac{v}{x^3} = -\frac{1}{2x^2} + c \quad\Longrightarrow\quad v = cx^3 - \tfrac{1}{2}x = \frac{x\left(Kx^2 - 1\right)}{2},$$

となる。ここで c は任意定数であり、$K = 2c$ である。したがって

$$y = \frac{1}{x} + \frac{2}{x\left(Kx^2 - 1\right)} = \frac{Kx^2 + 1}{x\left(Kx^2 - 1\right)},$$

であり、K は任意定数である。$K = 0$ とすると $y = -1/x$ が得られる。この置換では $1/v$ が存在することを仮定しているので、$y = 1/x$ そのもの（「$v = \infty$」）は取りこぼされる。$x^2\left(-\frac{1}{x^2}\right) + 1 + 1 = 1$ であるから、これもまた解であり、$K \to \infty$ としたときの解の族の極限になっている。

検算

- (i) において、$x = 0$ での解の値は $y(0) = \dfrac{2K - 3}{3(1 + K)}$ である。$x \to +\infty$ のとき $y \to -1$ となり、$x \to -\infty$ のとき $y \to \frac{2}{3}$ となる（$K \neq 0$ の場合）。つまり、解は一方の定数解からもう一方の定数解へと移っていく。これは予想どおりである。
- (ii) において、$K = 1$、$x = 2$ とすると、$y = \frac{5}{6}$ および $y'(2) = -\frac{31}{36}$ である。このとき $x^2y' + xy + x^2y^2 = -\frac{31}{9} + \frac{5}{3} + \frac{25}{9} = 1$ となり、確かに成り立つ。
- 二つの一般解をいずれも、有限差分（finite differences）を用いて、数百個の無作為な点と K の値について数値的に確かめた。元の方程式における残差（residual）は、丸め誤差の範囲でゼロであった。

よくある間違い

- (i) の答えに二つの定数 A、B を残したまま、意味をもつのはその比だけであることに気づかない。
- (ii) で x^2y^2 の交差項（cross term）にある因子 2 を忘れ、$3v/x$ が $2v/x$ になってしまい、誤った積分因子を得る。
- 置換では到達できない解 $y = 1/x$（あるいは (i) における $y = \frac{2}{3}$）を落としてしまう。

STEP のその先へ

$y' = p(x) + q(x)y + r(x)y^2$ の形の方程式はリッカチ方程式（Riccati equations）とよばれる。ここで用いた二つの技法はどちらも一般的に通用する。置換 $y = -u'/(ru)$ は、リッカチ方程式をつねに線形二階微分方程式に変換する。また、特殊解（particular solution）y_1 が一つわかっていれば、$y = y_1 + 1/v$ とおくことでつねに v についての線形一階微分方程式が得られる。リッカチ方程式と線形二階微分方程式とのこの結びつきは、量子力学（quantum mechanics）や制御理論（control theory）でも再び現れる。Boyce と DiPrima による *Elementary Differential Equations*（初等微分方程式）には、リッカチ方程式に関する演習問題がある。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。