解答例

STEP II 1993、第 2 問

純粋数学 ・ 三角関数と代数関数の積分

> **STEP II 1993、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/93-s2-q2

鍵となる考え方

小問 (i) では、余弦の積は積分しにくいが和なら容易なので、積和公式（factor formula）を用いて積を和に直す。あとはすべて一つの事実に帰着する。すなわち、$\cos kx$ を 1 周期（period）にわたって積分すると、$k = 0$ でない限り 0 になる。特別な場合とは、ちょうど $m - n$ または $m + n$ が 0 になる場合である。小問 (ii) では、根号の中を一つの分数にまとめて有理化（rationalise）する。これにより被積分関数（integrand）が標準的な二つの部分に分かれる。

解答

小問 (i)

積和公式 $2\cos A \cos B = \cos(A - B) + \cos(A + B)$ より

$$\cos(mx)\cos(nx) = \tfrac{1}{2}[\cos((m-n)x) + \cos((m+n)x)].$$

したがって、整数 k に対して $\int_0^{2\pi} \cos(kx)\,\mathrm{d}x$ を求めればよい。

$$\int_0^{2\pi} \cos(kx)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \left[\dfrac{\sin kx}{k}\right]_0^{2\pi} = \dfrac{\sin 2k\pi}{k} = 0, & k \neq 0, \\ \displaystyle\int_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}x = 2\pi, & k = 0. \end{cases}$$

ここでは k が整数であるから $\sin 2k\pi = 0$ となることを用いた。$k = 0$ のときは k で割ることができないので、この場合を別に扱っている。

? **考えてみよう** 場合はいくつあるか。また、それらは重なり合うか。

$k = m - n$ と $k = m + n$ はそれぞれ 0 であるかないかのどちらかであり、両方が 0 になるのは $m = n = 0$ のときに限る。よって場合は次の三つである。

- $m \neq n$ かつ $m \neq -n$、すなわち $|m| \neq |n|$ のとき：両方の積分が 0 になり、答えは 0 である。
- $m - n$ と $m + n$ のうちちょうど一方が 0、すなわち $|m| = |n| \neq 0$ のとき：一方の項が $\frac{1}{2} \cdot 2\pi$ を与え、他方は 0 を与えるので、答えは π である。
- $m = n = 0$ のとき：両方の項が $\frac{1}{2} \cdot 2\pi$ を与える（直接見ても、被積分関数は 1 である）。答えは 2π である。

まとめると

$$\int_0^{2\pi} \cos(mx)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & |m| \neq |n|, \\ \pi, & |m| = |n| \neq 0, \\ 2\pi, & m = n = 0. \end{cases}$$

cos は偶関数（even function）であり $\cos(-nx) = \cos(nx)$ となるので、$m = -n$ の場合は $m = n$ の場合と同じ扱いになることに注意しよう。

小問 (ii)

被積分関数 $\sqrt{1 + 1/x} = \sqrt{(x+1)/x}$ が実数となるのは $(x+1)/x \geq 0$ のとき、すなわち $x > 0$ または $x \leq -1$ のときに限る。まず $x > 0$ の場合を扱う。

$x > 0$ の場合。 根号の中の分子と分母に $x + 1$ を掛けると

$$\sqrt{\frac{x+1}{x}} = \sqrt{\frac{(x+1)^2}{x(x+1)}} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x}},$$

となる。ここで $(x+1)^2$ の平方根をとる際に $x + 1 > 0$ を用いた。次に、分子の一部が $x^2 + x$ の導関数の半分になるように分子を分ける。

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+x}}.$$

考えてみよう $1/\sqrt{x^2+x}$ はどのように積分すればよいか。

平方完成（completing the square）を行うと $x^2 + x = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$ である。すると、$u > a > 0$ で成り立つ標準的な結果 $\int (u^2 - a^2)^{-1/2}\,\mathrm{d}u = \ln\left(u + \sqrt{u^2 - a^2}\right)$ を $u = x + \frac{1}{2}$、$a = \frac{1}{2}$ として適用できる。

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+x}} = \ln\left(x + \tfrac{1}{2} + \sqrt{x^2+x}\right) + \text{定数} = \ln\left(2x + 1 + 2\sqrt{x^2+x}\right) + \text{定数}.$$

第 1 の部分は $\int \frac{1}{2}(2x+1)(x^2+x)^{-1/2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{x^2+x}$ である。したがって、$x>0$ のとき

$$\int \sqrt{1+\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{x^2+x} + \frac{1}{2}\ln\bigl(2x+1+2\sqrt{x^2+x}\bigr) + C.$$

$2x+1+2\sqrt{x^2+x} = \bigl(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\bigr)^2$ であるから、これは

$$\sqrt{x(x+1)} + \ln\bigl(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\bigr) + C.$$

と書くこともできる。置換（substitution）$x = \sinh^2 t$ を用いると、この第 2 の形が直接得られる。被積分関数は $2\cosh^2 t = 1+\cosh 2t$ となり、これを積分すると $t+\sinh t\cosh t$ となる。

$x \le -1$ の場合。 このとき $x+1 \le 0$ であるから $\sqrt{(x+1)^2} = -(x+1)$ となり

$$\sqrt{\frac{x+1}{x}} = -\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x}}.$$

同じ分け方が使えるが、今度は $x+\frac{1}{2} < 0$ なので、$|u| > a$ で成り立つ $\int (u^2-a^2)^{-1/2}\,\mathrm{d}u = \ln\bigl|u+\sqrt{u^2-a^2}\bigr|$ が必要になる。$x<-1$ のとき

$$\int \sqrt{1+\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x = -\sqrt{x^2+x} - \frac{1}{2}\ln\bigl|2x+1+2\sqrt{x^2+x}\bigr| + C.$$

$\bigl(2x+1+2\sqrt{x^2+x}\bigr)\bigl(2x+1-2\sqrt{x^2+x}\bigr) = 1$ であるから、対数の項は $+\frac{1}{2}\ln\bigl|2x+1-2\sqrt{x^2+x}\bigr|$ と書くこともできる。

検算

- 小問 (i)：$m=n=1$ のとき被積分関数は $\cos^2 x$ であり、その平均値は $\frac{1}{2}$ なので、積分は $\frac{1}{2}\cdot 2\pi = \pi$ となり、予想どおりである。$-6 \le m,n \le 6$ のすべての組について数値計算（シンプソンの公式（Simpson's rule））を行ったところ、三つの場合に分けた公式と一致した。
- 小問 (ii)：答えを微分する。$\sqrt{x^2+x}$ の導関数は $\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}$ である。$\frac{1}{2}\ln(\cdots)$ の導関数は $\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+x}}$ である。これらを加えると $\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+x}}$ となり、求めるとおりである。
- 数値的には、シンプソンの公式によっても、公式 $\sqrt{12}-\sqrt{2}+\frac{1}{2}\ln\dfrac{7+4\sqrt{3}}{3+2\sqrt{2}}$ によっても $\int_1^3 \sqrt{1+1/x}\,\mathrm{d}x \approx 2.48547$ となる。

よくある間違い

- $m = -n \neq 0$ の場合を忘れること。この場合も $m = n \neq 0$ の場合と同様に π になる。
- $k = 0$ のときに $\dfrac{\sin kx}{k}$ と書いてしまうこと。この場合は別に扱う必要がある。
- 符号を確かめずに $\sqrt{(x+1)^2} = x + 1$ と書くこと。これでは $x < -1$ に対して誤った答えになる。

STEP のその先へ

小問 (i) は、関数 $1, \cos x, \cos 2x, \ldots$ が $[0, 2\pi]$ 上で**直交する**（orthogonal）ことを述べている。これはフーリエ級数（Fourier series）の背後にある事実である。$f(x) = \sum a_n \cos nx$ ならば、$\cos mx$ を掛けて積分することで、ただ一つの係数 a_m が取り出される。積分が内積（dot product）の役割を果たすという同じ考え方が、関数の空間における線形代数（linear algebra）の多くを支えている。Strang の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は直交性を扱っており、Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations*（微分方程式入門）では、熱方程式（heat equation）を解く場面でフーリエ級数が実際に活躍する様子が示されている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。