解答例

STEP II 1993、第 14 問

力学 ・ 跳ね返りと反発係数

> **STEP II 1993、問 14**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/93-s2-q14

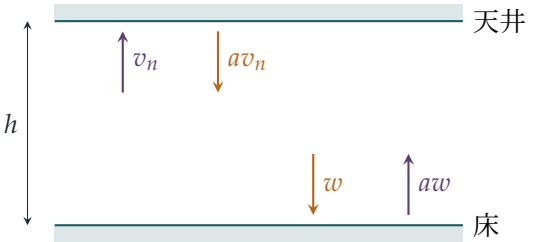
鍵となる考え方

衝突と衝突の間、ボールは重力のみを受けて自由に運動するので、$v^2 = u^2 \pm 2gh$ によって床での速さと天井での速さが結びつけられ、各衝突では速さが a 倍になる。1 周期（天井、床、そして再び天井）を追うと、天井での運動エネルギー（kinetic energy）に関する線形漸化式（linear recurrence）が得られ、これを不動点（fixed point）だけずらすことで解く。ボールが n 回目に天井に達するのは、ちょうどそのエネルギーが正であるときであり、対数（logarithm）をとるとこれが求める評価に変わる。

解答

ボールを鉛直方向に運動する質点（particle）とみなし、空気抵抗は無視する。また $0 < a < 1$ とする（評価式の分母に $\ln a$ があり、また $a = 1$ ならボールは永久に天井に当たり続ける）。n 回目の天井との衝突の直前の速さを v_n とし、

$$E_n = \frac{v_n^2}{2gh}, \qquad \text{とおくと} \qquad \tfrac{1}{2}mv_n^2 = mgh\,E_n.$$



最初の天井との衝突

ボールは $u^2 = 2kgh$ で床を離れ、重力に逆らって高さ h だけ上昇するので、

$$v_1^2 = 2kgh - 2gh = 2gh(k-1), \qquad E_1 = k - 1 > 0,$$

となる。$k > 1$ よりこれは正であるから、ボールは少なくとも 1 回は確実に天井に達する。

1 周期の解析

n 回目の天井との衝突の直後、ボールは速さ av_n で下向きに運動する（固定された天井でのニュートン（Newton）の実験則（Newton's experimental law））。ボールは高さ h だけ落下するので、床に達するときの速さを w とすると

$$w^2 = a^2 v_n^2 + 2gh.$$

ボールは速さ aw で上向きに跳ね返り、高さ h だけ上昇する。再び天井に達するならば、そこでの速さは

$$v_{n+1}^2 = a^2 w^2 - 2gh = a^4 v_n^2 + 2gh\,(a^2 - 1).$$

を満たす。$2gh$ で割ると、

$$E_{n+1} = a^4 E_n + (a^2 - 1).$$

これは右辺が正であるときに成り立つ。右辺が 0 以下であれば、ボールは二度と天井に達しない。

> **考えてみよう** $E_{n+1} = a^4 E_n + c$ の形の漸化式はどのように解けばよいか。

$E = a^4 E + (a^2 - 1)$ を満たす定数解 E を探す：

$$E = \frac{a^2 - 1}{1 - a^4} = \frac{a^2 - 1}{(1 - a^2)(1 + a^2)} = -\frac{1}{1 + a^2}.$$

この不動点を引くと定数項が消える。すなわち $F_n = E_n + \dfrac{1}{1 + a^2}$ とおくと $F_{n+1} = a^4 F_n$ となる。よって $F_n = a^{4(n-1)} F_1$ であり、$F_1 = (k-1) + \dfrac{1}{1 + a^2}$ であるから、

$$E_n = a^{4n-4}\left(k - 1 + \frac{1}{a^2 + 1}\right) - \frac{1}{a^2 + 1} = a^{4n-4}(k-1) + \frac{a^{4n-4} - 1}{a^2 + 1}.$$

mgh を掛けると、n 回目の天井との衝突の直前の運動エネルギーは

$$mgh\left(a^{4n-4}(k-1) + \frac{a^{4n-4} - 1}{a^2 + 1}\right),$$

となり、示すべきことが示された。

天井との衝突の回数

ボールが n 回目に天井に当たるのは、天井に到達したときに正の速さをもつとき、すなわち $E_n > 0$ のときに限る。（n 回目に天井に当たるならば、それ以前のすべての回でも天井に当たっているので、上の式が適用できる。）$E_n > 0$ の両辺に $a^2+1>0$ を掛けると、

$$a^{4n-4}((k-1)(a^2+1)+1) > 1 \quad \Longleftrightarrow \quad a^{4n-4}(a^2(k-1)+k) > 1.$$

両辺はともに正であるから、対数をとってよい：

$$(4n-4)\ln a + \ln[a^2(k-1)+k] > 0.$$

考えてみよう $4\ln a$ で割るとき、不等号の向きはどうなるか。

$0<a<1$ より $\ln a < 0$ であるから、$4\ln a$ で割ると不等号の向きが逆になる：

$$n-1 < -\frac{\ln[a^2(k-1)+k]}{4\ln a}, \qquad \text{すなわち} \qquad n < 1 - \frac{\ln[a^2(k-1)+k]}{4\ln a}.$$

したがって、ボールが天井に N 回当たるならば、$n=N$ でこの不等式が成り立ち、

$$N < 1 - \frac{\ln[a^2(k-1)+k]}{4\ln a}.$$

となる。特に、天井との衝突の回数はこの値以下であり、これが示すべきことであった。（実際には E_n は n について減少するので、N はこの上界より真に小さい正の整数の個数にちょうど等しい。）

検算

- $n=1$：式は $mgh(k-1)$ を与え、エネルギー保存則（conservation of energy）から得られる $\frac{1}{2}m(2kgh)-mgh$ と一致する。
- n が大きいとき：$E_n \to -\frac{1}{1+a^2} < 0$ となるので、ボールはやがて天井に届かなくなる。各衝突でエネルギーが失われるのだから、当然そうなるはずである。
- 数値的には、$k=6$、$a=0.9$、$h=2\,\mathrm{m}$、$m=1\,\mathrm{kg}$、$g=9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ として逐次シミュレーションを行うと、天井での運動エネルギーは 98、60.57、36.02 J となり、式と一致する。ボールは天井に 6 回当たり、上界は約 6.48 である。

よくある間違い

- 天井と床の**両方**で速さが a 倍になることを忘れ、1 周期あたり a^4 ではなく a^2 としてしまう。

- 不等号の向きを逆にせずに $\ln a$ で割ってしまう。
- 反発（restitution）の係数を速さではなく運動エネルギーに適用してしまう。各衝突でエネルギーは a 倍ではなく a^2 倍になる。

STEP のその先へ

漸化式 $E_{n+1} = a^4 E_n + c$ は 1 階線形差分方程式（first-order linear difference equation）である。不動点を引くという工夫は、線形常微分方程式（linear ODE）の特殊解（particular integral）を求めることの離散版であり、反復写像（iterated maps）とその安定性（stability）の研究にも再び現れる。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、衝突とエネルギー損失をより一般的に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。