解答例

STEP II 1993、第 13 問

力学 ・ 単振動

> **STEP II 1993、問 13**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/93-s2-q13

鍵となる考え方

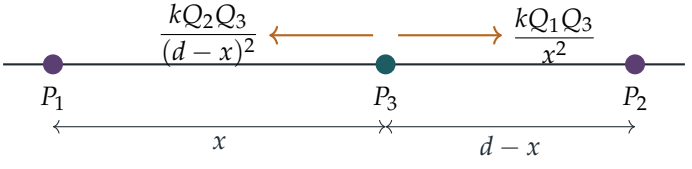
動くビーズに座標を設定し、それにはたらく合力を書き下す。互いに逆向きの 2 つの逆二乗（inverse-square）の斥力（repulsion）である。平衡（equilibrium）の位置とは、この 2 つがつり合う点である。振動については、ビーズを小さな y だけ変位させ、与えられた近似を**両方の**力に用いる。すると定数項は平衡条件によって打ち消し合い、y に比例する復元力（restoring force）だけが残る。これはまさに単振動（simple harmonic motion）の方程式である。

（問題文には P_3 が「P_1 と P_3 の間」を動くとあるが、これは「P_1 と P_2 の間」の誤りである。）

解答

モデル化。ビーズは質点とみなす。針金はなめらかで水平であるから、P_3 の重力と垂直抗力（normal reaction）はいずれも針金に垂直であり、針金に沿った運動には関与しない。針金に沿った力は、P_3 にはたらく 2 つの電気的斥力だけである（固定されたビーズはその位置に保持されているので、それらにはたらく力を気にする必要はない）。

x を P_1 から P_2 の向きに測ると、P_3 は P_1 から距離 x、P_2 から距離 $d-x$ の位置にあり、$0 < x < d$ である。



P_1 は P_3 を P_2 の向き（正の向き）に押し、P_2 はそれを押し返す。したがって、針金に沿ったニュートン（Newton）の運動の第 2 法則（Newton's second law）より

$$m\ddot{x} = \frac{kQ_1Q_3}{x^2} - \frac{kQ_2Q_3}{(d-x)^2}. \qquad (*)$$

平衡の位置

平衡のとき $x = a$ であり、$(*)$ の右辺は 0 になる。k と Q_3 は正であるから、kQ_3 で割ることができる：

$$\frac{Q_1}{a^2} = \frac{Q_2}{(d-a)^2} \quad \Longrightarrow \quad \left(\frac{d-a}{a}\right)^2 = \frac{Q_2}{Q_1}.$$

a と $d-a$ はともに正である（ビーズは固定されたビーズの間にある）から、正の平方根をとる：

$$\frac{d-a}{a} = \frac{\sqrt{Q_2}}{\sqrt{Q_1}} \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{Q_1}\,(d-a) = \sqrt{Q_2}\,a \quad \Longrightarrow \quad a = \frac{d\sqrt{Q_1}}{\sqrt{Q_1}+\sqrt{Q_2}},$$

となり、求める結果が得られた。以下では $S = \sqrt{Q_1} + \sqrt{Q_2}$、$b = d - a$ とおくと便利である。このとき

$$a = \frac{d\sqrt{Q_1}}{S}, \qquad b = \frac{d\sqrt{Q_2}}{S}.$$

ビーズは**弱いほうの**電荷の近くに位置することに注意しよう。これは理にかなっている。

微小振動

y を小さいとして $x = a + y$ とおくと、$d - x = b - y$、$\ddot{x} = \ddot{y}$ である。与えられた近似（および、y を $-y$ に、a を b に置き換えた同じ近似）を用いると

$$\frac{1}{(a+y)^2} \approx \frac{1}{a^2} - \frac{2y}{a^3}, \qquad \frac{1}{(b-y)^2} \approx \frac{1}{b^2} + \frac{2y}{b^3}.$$

これらを $(*)$ に代入すると：

$$\begin{aligned} m\ddot{y} &\approx kQ_3\left[Q_1\left(\frac{1}{a^2} - \frac{2y}{a^3}\right) - Q_2\left(\frac{1}{b^2} + \frac{2y}{b^3}\right)\right] \\ &= kQ_3\left(\frac{Q_1}{a^2} - \frac{Q_2}{b^2}\right) - 2kQ_3\left(\frac{Q_1}{a^3} + \frac{Q_2}{b^3}\right)y. \end{aligned}$$

考えてみよう y を含まない項はどうなるか？

それらはまさに平衡条件そのものであるから、$\frac{Q_1}{a^2} - \frac{Q_2}{b^2} = 0$ となって打ち消し合う。平衡点のまわりで展開するときには必ずこうなる。0 次の力は定義により 0 なのである。

次に、a と b の式を用いて y の係数を簡単にする：

$$\frac{Q_1}{a^3} = \frac{Q_1 S^3}{d^3 Q_1^{3/2}} = \frac{S^3}{d^3\sqrt{Q_1}}, \qquad \frac{Q_2}{b^3} = \frac{S^3}{d^3\sqrt{Q_2}},$$

よって

$$\frac{Q_1}{a^3} + \frac{Q_2}{b^3} = \frac{S^3}{d^3} \cdot \frac{\sqrt{Q_2} + \sqrt{Q_1}}{\sqrt{Q_1 Q_2}} = \frac{S^4}{d^3\sqrt{Q_1 Q_2}}.$$

したがって

$$\ddot{y} \approx -\omega^2 y, \qquad \omega^2 = \frac{2kQ_3 S^4}{md^3\sqrt{Q_1 Q_2}} > 0.$$

これは単振動の方程式であるから、微小な変位に対して P_3 は $x = a$ を中心に近似的に単振動を行う。（$y = y_0$ で静かに放すと、運動は $y \approx y_0 \cos \omega t$ となる。）周期は

$$\begin{aligned} T = \frac{2\pi}{\omega} &= 2\pi\sqrt{\frac{md^3\sqrt{Q_1 Q_2}}{2kQ_3 S^4}} = \frac{2\pi d}{S^2}\sqrt{\frac{md\sqrt{Q_1 Q_2}}{2kQ_3}} \\ &= \frac{\pi d}{S^2}\sqrt{\frac{4md\sqrt{Q_1 Q_2}}{2kQ_3}} = \frac{\pi d}{(\sqrt{Q_1} + \sqrt{Q_2})^2}\sqrt{\frac{2md\sqrt{Q_1 Q_2}}{kQ_3}}, \end{aligned}$$

であり、これが求める結果である。

検算

- **対称性：** $Q_1 = Q_2$ のとき $a = d/2$、すなわち中点となり、当然そうなるべき結果である。周期の式は Q_1 と Q_2 について対称であり、これもそうあるべきである（電荷を入れ替えることは図を左右反転することにすぎない）。
- **次元（dimensions）：** kQQ'/r^2 は力であるから、$kQ_3\sqrt{Q_1 Q_2}$ の次元は力 × 長さ^2 である。すると $md\sqrt{Q_1 Q_2}/(kQ_3) \cdot d^2/(\sqrt{Q_1} + \sqrt{Q_2})^4$ の次元は 質量 × 長さ / 力 = 時間^2 となる。よし。
- **数値：** $Q_1 = 4$、$Q_2 = 1$、$d = 3$、$k = Q_3 = m = 1$ とすると、$a = 2$（確認：$4/2^2 = 1/1^2$）、$T = 2\pi/\sqrt{3} \approx 3.628$ を得る。定数をさまざまにランダムに選び、ごく小さな変位から $(*)$ を数値積分すると、周期の式が 10^4 分の 1 よりよい精度で再現される。

よくある間違い

- 2 つの力のうち一方だけを展開してしまう。どちらも y に依存し、どちらも復元力に（同じ符号で）寄与する。
- $1/(b-y)^2$ における y の項の符号を誤る。与えられた近似で y を $-y$ に置き換えると $+2y/b^3$ となる。

- 平衡条件で負の平方根をとってしまう。そうするとビーズが線分 P_1P_2 の外に出てしまう。

STEP のその先へ

ここで行ったのは**線形化**（linearisation）である。ポテンシャル（potential）$V(x)$ の安定な平衡点の近くでは、運動は近似的に $\omega^2 = V''(a)/m$ の単振動となる。ここでは $V = kQ_3\big(Q_1/x + Q_2/(d-x)\big)$ であり、$V''(a)$ から同じ ω^2 が得られることを確かめることができる。この考え方を複数の座標に拡張すると、基準振動（normal modes of vibration）に至る。これは大学 1 年の力学の中心的な話題である。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、平衡点のまわりの微小振動をわかりやすく扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。