解答例

STEP II 1993、第 12 問

力学 ・ 摩擦と剛体

> **STEP II 1993、問 12**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/93-s2-q12

鍵となる考え方

球は壁と平面の間に挟まれているので、どちらか一方との接触を失わずに動き出すことはできない。両方の接点で同時に滑るなら、中心は動かず、球は単に中心のまわりに回転するだけである。どちら向きに回転するかを考えれば、それぞれの摩擦力（friction）がどちら向きにはたらくかがわかる。あとは未知数 N_1、N_2、m についての 3 つの式（2 方向の力のつり合いと 1 つのモーメントのつり合い）を立てればよい。後半では、モーメントをとる点を適切に選べば、答えは 1 行で得られる。

解答

モデルと摩擦の向き

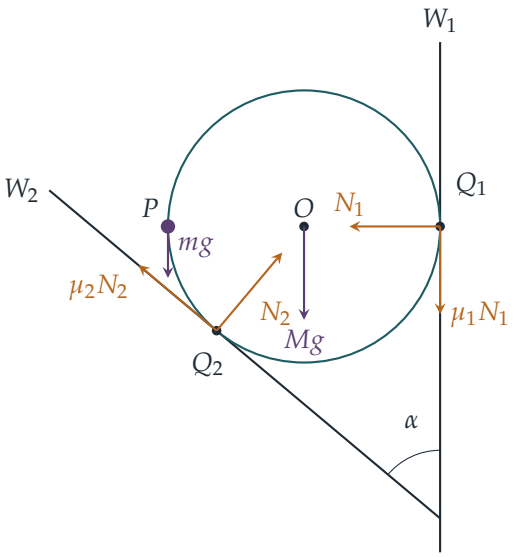
球を一様な剛体球（rigid uniform sphere）、粒子を P に固定された質点とみなす。Q_1 と Q_2 での接触は粗い。垂直抗力（normal reaction）を N_1（水平で、壁から離れる向き）と N_2（平面に垂直で、中心 O を通る）とする。

PQ_1 は水平な直径なので、粒子は O から水平距離 r の位置、壁と反対側にぶら下がっている。したがってその重さは O のまわりに mgr のモーメント（moment）をもち、P が下がる向きに球を回そうとする。接点での力がこれとつり合わなければならない。

> ? **考えてみよう** 各接点で摩擦はどちら向きにはたらくか？

球が両方の点で滑るとき、球は両方と接したままなので O は固定され、球は P が下がる向きに O のまわりを回転する。すると、P の反対側の点である Q_1 は壁に沿って**上向き**に動き、Q_2 は平面に沿って隅のほうへ**下向き**に動く。摩擦は滑りを妨げる向きに

はたらくので、Q_1 では壁に沿って**下向き**に、Q_2 では平面に沿って**上向き**にはたらく。両方の点でまさに滑り出そうとしているので、どちらでも摩擦は限界摩擦（limiting friction）であり、$F_1 = \mu_1 N_1$、$F_2 = \mu_2 N_2$ である。どちらの摩擦力も O のまわりに粒子のモーメントと逆向きのモーメントをもつが、これは当然そうあるべきである。



両方の接点で滑る場合

平面は鉛直と角 α をなすので、その法線は水平と角 α をなす。すると N_2 は壁に向かう成分 $N_2 \cos\alpha$ と上向きの成分 $N_2 \sin\alpha$ をもち、平面に沿って上向きの摩擦 $\mu_2 N_2$ は壁から離れる向きの成分 $\mu_2 N_2 \sin\alpha$ と上向きの成分 $\mu_2 N_2 \cos\alpha$ をもつ。

水平方向の力のつり合いより：

$$N_1 = N_2 \cos\alpha - \mu_2 N_2 \sin\alpha = N_2(\cos\alpha - \mu_2 \sin\alpha). \tag{1}$$

鉛直方向の力のつり合いより：

$$N_2 \sin\alpha + \mu_2 N_2 \cos\alpha - \mu_1 N_1 = (M+m)g. \tag{2}$$

O のまわりのモーメントを考える。2 つの垂直抗力はどちらも O を通り、Mg も O を通る。2 つの摩擦力は接線に沿ってはたらき、O からの距離は r である。よって

$$mgr = \mu_1 N_1 r + \mu_2 N_2 r \quad \Longrightarrow \quad mg = \mu_1 N_1 + \mu_2 N_2. \tag{3}$$

(1) を (3) と (2) に代入すると：

$$mg = N_2(\mu_2 + \mu_1 \cos\alpha - \mu_1\mu_2 \sin\alpha),$$
$$(M+m)g = N_2(\sin\alpha + \mu_2 \cos\alpha - \mu_1 \cos\alpha + \mu_1\mu_2 \sin\alpha).$$

2 番目の式から 1 番目の式を引くと

$$\begin{aligned} Mg &= N_2(\sin\alpha + \mu_2\cos\alpha - 2\mu_1\cos\alpha + 2\mu_1\mu_2\sin\alpha - \mu_2) \\ &= N_2((2\mu_1\mu_2+1)\sin\alpha + (\mu_2 - 2\mu_1)\cos\alpha - \mu_2). \end{aligned}$$

mg の式をこの式で割ると、N_2 と g が消えて

$$m = \frac{\mu_2 + \mu_1\cos\alpha - \mu_1\mu_2\sin\alpha}{(2\mu_1\mu_2+1)\sin\alpha + (\mu_2 - 2\mu_1)\cos\alpha - \mu_2} M,$$

となり、求める結果が得られた。

これが物理的に意味をもつためには $N_1 > 0$ が必要であり、(1) よりこれは $\mu_2 < \cot\alpha$ ということである。μ_2 がそれより大きければ、Q_2 での摩擦が球を壁から引き離すことになり、最後の小問の状況になる。

Q_2 のまわりに転がる場合

今度は球は Q_2 で滑らない。その代わりに Q_2 のまわりに回転しようとしている（平面を転がり上がる）ので、中心は壁から離れる向きに動き、Q_1 での接触はまさに失われようとしている。転がり始める瞬間には $N_1 = 0$ であり、したがって Q_1 での摩擦も 0 である。

考えてみよう 今や未知となった Q_2 での摩擦はどう扱えばよいか？

Q_2 のまわりのモーメントをとれば、Q_2 での抗力も摩擦も式から消える。残るのは 2 つの重さだけである。水平距離を Q_2 から測る。OQ_2 は平面に垂直なので水平と角 α をなし、したがって O は Q_2 から壁側に水平距離 $r\cos\alpha$ のところにある。粒子は O からさらに壁と反対側に r だけ離れているので、Q_2 から反対側に水平距離 $r - r\cos\alpha$ のところにある。モーメントがつり合うためには

$$Mgr\cos\alpha = mgr(1-\cos\alpha) \quad \Longrightarrow \quad m = \frac{M\cos\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{M}{\sec\alpha - 1},$$

である。最後の等号では分子と分母を $\cos\alpha$ で割った。これが求める結果である。

検算

- 2 つの答えは、2 つの状況の境界 $N_1 = 0$、すなわち $\mu_2 = \cot\alpha$ で一致するはずである。最初の式に $\mu_2 = \cos\alpha/\sin\alpha$ を代入すると、μ_1 の値によらず、分子は $\cot\alpha$ に、分母は $(1-\cos\alpha)/\sin\alpha$ になる。よって $m = M\cos\alpha/(1-\cos\alpha)$ となり、2 番目の答えと一致する。
- $\alpha = 60°$ のとき、2 番目の答えは $m = M$ を与える。$\alpha = 60°$、$\mu_1 = 0.2$、$\mu_2 = 0.3$、

$M = 1$ のとき、最初の答えは $m \approx 0.561$ を与える。これらの値と、2000 個のランダムな場合について、力とモーメントのつり合いをコンピュータで確かめた。

- 両方の接触がなめらか（$\mu_1 = \mu_2 = 0$）なら、最初の式は $m = 0$ を与える。粒子のモーメントに抵抗するものが何もないのだから、予想どおりである。

よくある間違い

- 摩擦の向きを間違える。まず球がどちらに回るかを決め、次に各接点がどちらに滑るかを考えること。
- 2 つの抗力はどちらも中心を通るので、O のまわりのモーメントの式には現れないことを忘れる。
- 最後の小問で、壁での摩擦を残してしまう。球が壁から離れようとしているときは $N_1 = 0$ なので、そこでの摩擦は 0 である。

STEP のその先へ

このように、滑ったり転がったりしうる接点が複数ある問題は、拘束（constraint）のある剛体の力学の入り口である。各接点は不等式（$|F| \le \mu N$、$N \ge 0$）を与え、そのうちどれが等号で成り立つかを見きわめなければならない。同じ場合分けはロボット工学にも現れ、ロボットの手が物をつかめるかどうかを決める。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、静力学（statics）と剛体の回転を丁寧に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。