解答例

STEP II 1993、第 11 問

力学 ・ 速度の 2 乗に比例する抵抗を受ける運動

STEP II 1993、問 11

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

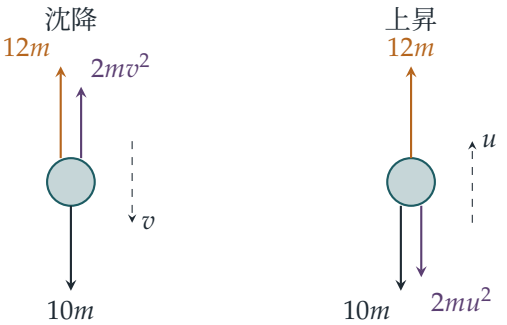
step.maths.org/questions/93-s2-q11

鍵となる考え方

物体が液体に入ると浮力（buoyancy）が重力を上回るので、v^2 に比例する抵抗（resistance）に加えて、一定の正味の上向きの力がはたらく。抵抗は常に運動を妨げる向きにはたらくので、物体が向きを変えるとその向きが反転する。したがって、沈む段階と上昇する段階では別々の運動方程式（equation of motion）が必要になる。どちらもきれいに変数分離（separation of variables）できる。時間を求めたいときは $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ を、距離を求めたいときは $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ を用いる。

解答

物体を質点としてモデル化する。液体中では、重力は下向きに $10m\,\mathrm{N}$、浮力は上向きに $\frac{6}{5}\times 10m = 12m\,\mathrm{N}$ であるから、これらを合わせると、物体がどちら向きに動いていても、**上向きに** $2m\,\mathrm{N}$ の正味の力となる。抵抗 $2mv^2\,\mathrm{N}$ は速度と逆向きにはたらく。



沈む段階

下向きを正とし、x を液面からの深さ、v を下向きの速さとする。ニュートン（Newton）の運動の第 2 法則（Newton's second law）より

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 10m - 12m - 2mv^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -2(1+v^2).$$

物体が速さ $V > 0$ で液体に入るとする。変数を分離し、液体に入った瞬間（$t = 0$、$v = V$）から沈むのが止まる瞬間（$t = T_1$、$v = 0$）まで積分すると

$$\int_V^0 \frac{\mathrm{d}v}{1+v^2} = -2\int_0^{T_1} \mathrm{d}t \qquad \Longrightarrow \qquad T_1 = \tfrac{1}{2}\arctan V.$$

任意の有限な V に対して $\arctan V < \frac{\pi}{2}$ であるから、$T_1 < \frac{1}{4}\pi$ を得る。すなわち、どれほど速く投げ入れても、物体は液体に入ってから $\frac{1}{4}\pi$ 秒未満で沈むのが止まる。（また、常に $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \le -2$ であるから、物体は確かに止まる。）

$V = 1$ のときの到達深さ

このとき $T_1 = \frac{1}{2}\arctan 1 = \frac{\pi}{8}$ である。深さを求めるため、加速度を $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ と書くと

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -2(1+v^2) \qquad \Longrightarrow \qquad \int_1^0 \frac{v\,\mathrm{d}v}{1+v^2} = -2\int_0^D \mathrm{d}x,$$

よって $-\frac{1}{2}\ln 2 = -2D$ であり、最大の深さは

$$D = \tfrac{1}{4}\ln 2 \text{ メートル},$$

となり、題意が示された。

上昇する段階

深さ D で物体は一瞬静止するが、上向きの正味の力 $2m$ N は依然としてはたらいているので、物体は上昇し始める。このとき抵抗は下向きにはたらく。上向きを正とし、y を最下点からの上昇高さ、u を上向きの速さとすると

$$m\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 12m - 10m - 2mu^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 2(1-u^2).$$

考えてみよう 沈む段階の方程式をそのまま使い、v を負にするだけではなぜいけないのだろうか。

項 $-2mv^2$ は v の符号によらず常に上向きである。物体が上昇しているときは抵抗は下向きでなければならないので、方程式が変わるのである。（1 つの方程式で表すなら $-2mv|v|$ とする必要がある。）また、上昇中は常に $u < 1$ であることにも注意しよ

う。u は 0 から始まり、$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} > 0$ となるのは $u < 1$ の間だけであるから、u は終端速度（terminal speed）1 ms^{-1} に近づくことしかできない。このことから、以下で $1-u^2$ は正である。

液面での速さ。 $u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} = 2(1-u^2)$ を用い、$y=0$、$u=0$ から $y=D$、$u=U$ まで積分すると

$$\int_0^U \frac{u\,\mathrm{d}u}{1-u^2} = 2\int_0^D \mathrm{d}y \qquad \Longrightarrow \qquad -\tfrac{1}{2}\ln(1-U^2) = 2D = \tfrac{1}{2}\ln 2.$$

よって $1-U^2 = \frac{1}{2}$ であり、物体は速さ $U = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ms^{-1} で液面に戻る。

上昇にかかる時間。 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 2(1-u^2)$ を部分分数分解（partial fractions）$\dfrac{1}{1-u^2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1+u} + \dfrac{1}{1-u}\right)$ とともに用いると

$$T_2 = \frac{1}{2}\int_0^U \frac{\mathrm{d}u}{1-u^2} = \frac{1}{4}\Big[\ln\frac{1+u}{1-u}\Big]_0^U = \frac{1}{4}\ln\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1},$$

となる。最後の段階では分母と分子に $\sqrt{2}$ を掛けた。

合計の時間。 物体がふたたび液面に達するのは、プールに入ってから

$$T_1 + T_2 = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right) \text{ 秒}$$

後であり、題意が示された。

検算

- $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = (\sqrt{2}+1)^2$ であるから、上昇にかかる時間は $T_2 = \frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2}) \approx 0.4407\,\mathrm{s}$ であり、合計は $\approx 0.3927 + 0.4407 = 0.8334\,\mathrm{s}$ である。
- 運動を数値的に追跡する（抵抗を $-2v|v|$ と書いてルンゲ＝クッタ法（Runge–Kutta method）を用いる）と、止まるまでの時間 0.39270 s、深さ 0.17329 m $= \frac{1}{4}\ln 2$、戻ったときの速さ 0.70711 ms^{-1}、戻るまでの時間 0.83339 s が得られ、すべて一致する。
- 戻ったときの速さは入ったときの速さより小さく、当然そうでなければならない。抵抗は往路でも復路でも負の仕事をするからである。

よくある間違い

- 上昇するときも抵抗を上向きのままにしてしまう。すると上向きの正味の力が $2m + 2mu^2$ となり、上昇がはるかに速くなってしまう。

- 浮力が重力を上回ることを忘れる。正味の力は（下向きを正として）$+2m$ ではなく $-2m$ である。
- 深さを求めるのに $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ を、時間を求めるのに $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ を用いてしまい、積分で行き詰まる。

STEP のその先へ

二次の抵抗（quadratic drag）により運動方程式は非線形（nonlinear）になるが、それでも変数分離が可能である。そのため、下降では arctan が、上昇では $\tanh^{-1}$ が現れる（実際 $T_2 = \frac{1}{2}\tanh^{-1} U$ である）。上昇では速さが終端速度 $1\ \mathrm{ms}^{-1}$ に近づき、そこで抵抗が上向きの正味の力とつり合う。大学 1 年の講義では、$\dot{u} = 2(1-u^2)$ のような方程式の相直線（phase line）による描像も含めて、このようなモデルを系統的に扱う。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は速度に依存する力を扱っており、Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations*（初等微分方程式）は変数分離形の方程式と自励系の方程式（autonomous equation）を扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。