解答例

STEP II 1993、第 10 問

純粋数学 • 2 次形式と 2 次曲線

> **STEP II 1993、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/93-s2-q10

鍵となる考え方

x と y についての二次方程式が扱いにくい理由は二つある。xy の交差項（cross term）と一次の項である。行列 $\mathbf{P}$ は前者を処理する。$\mathbf{PAP}$ が対角（diagonal）になるからである。平行移動 $\mathbf{a}$ は後者を処理する。これを原点が円錐曲線（conic）の中心に移るように選ぶと、$\mathbf{x}_1$ について一次の項がすべて打ち消し合う。残るのは純粋な「平方和＝定数」の形である。

解答

対角化

まず、

$$\mathbf{AP} = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 8 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -10 \\ 30 & 5 \end{pmatrix},$$

であるから、

$$\mathbf{PAP} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 & -10 \\ 30 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 75 & 0 \\ 0 & -25 \end{pmatrix},$$

となり、要求どおり対角行列である。また、$\mathbf{P}$ は対称なので $\mathbf{P}^{\mathrm{T}} = \mathbf{P}$ であることにも注意しておく。これはすぐ後で使う。

代入

$\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}$ とおく。すると $\mathbf{x}^{\mathrm{T}} = \mathbf{x}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{P} + \mathbf{a}^{\mathrm{T}}$ であり、

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{x}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{a} + \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{a} \\ &= \mathbf{x}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{x}_1 + 2\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{a}.\end{aligned}$$

となる。中央の二つの項は等しい。各項は 1×1 行列なので自身の転置（transpose）に等しく、さらに $\mathbf{A}$ と $\mathbf{P}$ が対称であることを用いると $(\mathbf{x}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{a})^{\mathrm{T}} = \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_1 = \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{x}_1$ となるからである。また $\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{x}_1 + \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{a}$ である。よって方程式は次のようになる。

$$\mathbf{x}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{x}_1 + (2\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} + \mathbf{b}^{\mathrm{T}})\mathbf{P}\mathbf{x}_1 + (\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{a} + \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{a} - 11) = 0.$$

考えてみよう　「適切なベクトル $\mathbf{a}$」は何を満たさなければならないか？

目標の形 $3x_1^2 - y_1^2 = c$ には x_1 や y_1 単独の項がないので、中央の括弧は消えなければならない。$\mathbf{A}$ は対称なので $2\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} + \mathbf{b}^{\mathrm{T}} = (2\mathbf{A}\mathbf{a} + \mathbf{b})^{\mathrm{T}}$ であり、したがって次が必要である。

$$\mathbf{A}\mathbf{a} = -\tfrac{1}{2}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -9 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

ここで $\det \mathbf{A} = -11 - 64 = -75 \neq 0$ なので、解はただ一つ存在する：

$$\mathbf{a} = -\frac{1}{75}\begin{pmatrix} 11 & -8 \\ -8 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -9 \\ -3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{75}\begin{pmatrix} -75 \\ 75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

（検算：$\mathbf{A}\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -1-8 \\ 8-11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -3 \end{pmatrix}$。）

定数項

この $\mathbf{a}$ に対しては $\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{a} = \mathbf{a}^{\mathrm{T}}(-\tfrac{1}{2}\mathbf{b}) = -\tfrac{1}{2}\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{a}$ であるから、定数項は

$$\tfrac{1}{2}\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{a} - 11 = \tfrac{1}{2}(18 - 6) - 11 = -5.$$

である。二次の項は

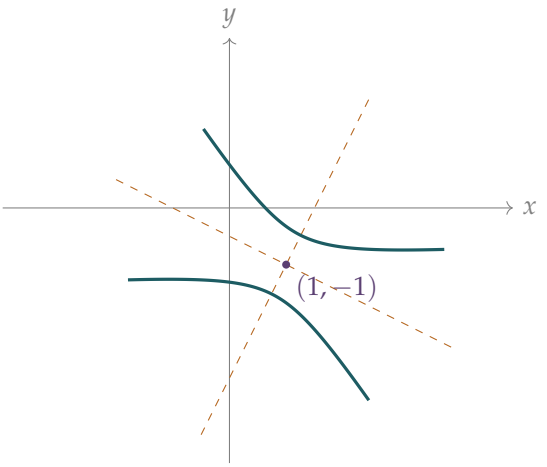
$$\mathbf{x}_1^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} 75 & 0 \\ 0 & -25 \end{pmatrix}\mathbf{x}_1 = 75x_1^2 - 25y_1^2.$$

である。よって方程式は $75x_1^2 - 25y_1^2 - 5 = 0$ となる。25 で割ると、

$$3x_1^2 - y_1^2 = \tfrac{1}{5}, \qquad \text{よって} c = \tfrac{1}{5}.$$

成分で書くと、代入は $x = x_1 + 2y_1 + 1$、$y = 2x_1 - y_1 - 1$ である。元の方程式は $-x^2 + 16xy + 11y^2 + 18x + 6y - 11 = 0$ であるから、この曲線は中心 $(1, -1)$ の双曲線

（hyperbola）である。**P** の列 $(1,2)$ と $(2,-1)$ は直交しているので、これらがこの双曲線の対称軸（axes of symmetry）を与える。



破線は対称軸であり、その方向は $(1,2)$ と $(2,-1)$ である。

考えてみよう なぜ **P** は回転（rotation）ではないのか？

列どうしは直交しているが、それぞれの長さが $\sqrt{5}$ なので、$\mathbf{P}^2 = 5\mathbf{I}$ であって **I** ではない。**PAP** の対角成分が 75 と -25 になるのはこのためである。これらは **A** の固有値（eigenvalues）15 と -5 の 5 倍になっている。この倍率はここでは問題にならない。二次の部分が 5 倍されるだけだからである。

検算

- **A** のトレース（trace）と行列式（determinant）は 10 と -75 なので、固有値は 15 と -5 である。これらは 75/5 と $-25/5$ に一致する。
- $x_1 = y_1 = 0$ とする。このとき $(x,y) = (1,-1)$ であり、元の左辺は $-1-16+11+18-6-11 = -5$ となって、$75x_1^2 - 25y_1^2 - 5$ と一致する。
- $x_1 = 1$、$y_1 = 1$ とする。このとき $(x,y) = (4,0)$ であり、$-16+72-11 = 45 = 75-25-5$ となる。

さらに、恒等式 左辺 $= 25\left(3x_1^2 - y_1^2 - \frac{1}{5}\right)$ が成り立つことを、1000 個のランダムな有理点で厳密に確認した。

よくある間違い

- 交差項 $\mathbf{x}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{PAa}$ と $\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{APx}_1$ が等しいことを忘れると、因子 2 が抜け落ちて $\mathbf{Aa} = -\mathbf{b}$ となってしまう。
- $75x_1^2 - 25y_1^2 = 5$ で止めてしまい、要求された形に合わせて全体を割らずに $c = 5$ と答えてしまう。

STEP のその先へ

これは主軸定理（principal axes theorem）の縮図である。すべての実対称行列（real symmetric matrix）は直交行列（orthogonal matrix）によって対角化できる（ここでは $\mathbf{P}/\sqrt{5}$ がそれにあたる）。したがって、すべての円錐曲線、そして三次元のすべての二次曲面（quadric surface）は、回転（または鏡映）と平行移動によって標準形に直すことができる。同じ考え方により、多変数関数の停留点（stationary points）をヘッセ行列（Hessian matrix）を通して分類できる。Strang の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）には、対称行列と正定値性（positive definiteness）についての優れた章がある。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。