解答例

STEP II 1993、第 1 問

純粋数学 ・ 組合せゲームの戦略

STEP II 1993、問 1

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/93-s2-q1

鍵となる考え方

すべては一つの数え上げの事実に基づく。両者とも分配できるのはちょうど 9 であるから、ベティがすべての戦場（field）でアダムと同点以上となり、しかもそのうち一つで勝つことはできない。そのためには少なくとも $9+1$ が必要になるからである。したがって、ベティが勝つときは必ずちょうど二つの戦場で勝ち、残りの一つで負ける。このことがわかれば、前半は決まった手順に従うだけになり、二つの三つ組（triple）に関する部分は短い場合分け（case analysis）で片づく。

解答

以下では、「ベティが戦場 i で勝つ」とは $b_i > a_i$ のことであり、「アダムが戦場 i で勝つ」とは $a_i > b_i$ のことであり、$a_i = b_i$ である戦場は引き分けとする。

補題：ベティはどのように勝てるか

ベティの三つ組がアダムの三つ組 (a_1, a_2, a_3) に勝つとする。ただし $a_1 + a_2 + a_3 = 9$ である。

- 三つの戦場すべてで勝つことはできない。そのためには各 i について $b_i \geq a_i + 1$ が必要となり、$b_1 + b_2 + b_3 \geq 12$ となってしまうからである。
- ちょうど一つの戦場で勝つとする。ベティはアダムより多く得点しているので、アダムの得点は 0 であり、残りの二つの戦場は引き分けかベティの勝ちである。すると、すべての i について $b_i \geq a_i$ であり、少なくとも一つでは狭義の不等号が成り立つので、$b_1 + b_2 + b_3 \geq 9 + 1 = 10$ となる。これは不可能である。

ベティはアダムより多く得点しているので、少なくとも 1 点は得ている。よって、ベティは**ちょうど二つ**の戦場で勝つ。したがって、ベティが (a_1, a_2, a_3) に勝つための必要十分条件は、ある二つの戦場 i, j について

$$b_i \geq a_i + 1, \qquad b_j \geq a_j + 1,$$

が成り立ち、残りの戦場 k で負けることである。なお、戦場 k で負けることは自動的に成り立つ。実際、$b_k = 9 - b_i - b_j \leq 9 - a_i - a_j - 2 = a_k - 2$ である。

ベティは常に勝てる

$a_1 \geq a_2 \geq a_3$ となるように戦場に番号をつける。すると $3a_1 \geq a_1 + a_2 + a_3 = 9$ であるから、$a_1 \geq 3$ である。ベティはアダムが最も強い戦場を捨て、他の二つの戦場で一つずつ上回る：

$$(b_1, b_2, b_3) = (a_1 - 2,\ a_2 + 1,\ a_3 + 1).$$

これらは非負整数であり（$a_1 - 2 \geq 1$ だから）、和は 9 である。$a_1 - 2 < a_1$ であるから、ベティは戦場 2 と 3 で勝ち、戦場 1 で負ける。ベティの得点は 2、アダムの得点は 1 であるから、ベティが勝つ。

アダムは決して勝たないようにできる

$(a_1, a_2, a_3) = (9, 0, 0)$ とする。$b_2, b_3 \geq 0$ であるから、アダムは戦場 2 や 3 では得点できない。よってアダムの得点は高々 1 点であり、それは戦場 1 で勝つとき、すなわち $b_1 \leq 8$ のときに限る。その場合 $b_2 + b_3 = 9 - b_1 \geq 1$ であるから、ベティは戦場 2 か戦場 3 に正の値を置いており、少なくとも 1 点を得る。アダムの得点は 0 であるか、または 1 でベティの得点が少なくとも 1 であるかのいずれかである。どちらの場合もアダムの得点はベティを上回らないので、ベティがどうしようとアダムは決して勝たない。

（総当たり（brute force）で調べると、この性質をもつ三つ組は $(9, 0, 0)$ とその並べ替え**だけ**であることがわかる。それ以外の三つ組に対しては、ベティが何らかの愚かな選択をすればアダムに勝ちを譲ることになる。）

二つの三つ組：$(5, 3, 1)$ と $(3, 1, 5)$

両方に勝つ三つ組 (b_1, b_2, b_3) が存在しないことを示せばよい。補題により、ベティはそれぞれの三つ組に対して二つの戦場で勝つ必要がある。

$(5, 3, 1)$ に対して。戦場 1 と 2 で勝つには $6 + 4 = 10 > 9$ が必要であり、不可能である。よって、戦場 3 と、戦場 1 または戦場 2 で勝たなければならない：

$$b_3 \geq 2 \quad \text{かつ} \quad (b_1 \geq 6 \ \text{または}\ b_2 \geq 4). \tag{A}$$

$(3,1,5)$ **に対して**。戦場 1 と 3 で勝つには $4+6=10>9$ が必要であり、不可能である。よって、戦場 2 と、戦場 1 または戦場 3 で勝たなければならない：

$$b_2 \geq 2 \quad \text{かつ} \quad (b_1 \geq 4 \ \text{または}\ b_3 \geq 6). \tag{B}$$

> **考えてみよう** どちらの条件にも戦場の選択が含まれている。場合を見落とさずに両者を組み合わせるにはどうすればよいか？

(B) の後半の選択で場合分けする。

- $b_3 \geq 6$ ならば $b_1+b_2 \leq 3$ であるから、$b_1 \geq 6$ も $b_2 \geq 4$ も成り立たず、(A) に矛盾する。
- $b_1 \geq 4$ ならば、(B) の $b_2 \geq 2$ と (A) の $b_3 \geq 2$ を合わせ、(A) の選択肢を加えると、

  $$b_1+b_2+b_3 \geq 6+2+2=10 \qquad \text{または} \qquad b_1+b_2+b_3 \geq 4+4+2=10.$$

  のいずれかとなる。和は 9 であるから、どちらも不可能である。

どの場合も矛盾が生じるので、$(5,3,1)$ と $(3,1,5)$ の両方に勝つ三つ組は存在しない。よって、示すべきとおり、アダムはこの組で勝つ。

検算

三つ組は $\binom{11}{2}=55$ 個しかないので、すべて総当たりで確かめられる。コンピュータで調べると、アダムの 55 個の三つ組はどれも上のベティの手順で打ち負かされ、勝つ応手はどれもちょうど二つの戦場で勝つことが確かめられる。また、$(5,3,1)$ に勝つ 13 個の三つ組と $(3,1,5)$ に勝つ 13 個の三つ組を列挙すると、両方のリストに共通する三つ組は見つからない。具体例として、$(4,2,3)$ は $(3,1,5)$ に 2–1 で勝つが、$(5,3,1)$ に対しては戦場 3 でしか勝てず、戦場 1 と 2 で負けるので、1–2 で負ける。

よくある間違い

- アダムの「決して勝たない」三つ組として $(3,3,3)$ を試してしまう。ベティが $(2,2,5)$ を出せば 1–2 で負けるので、この三つ組ではアダムは勝つことが**ありうる**。
- ベティが一つの戦場だけで勝つにはアダムが無得点である必要があることを忘れ、さらに和が 9 であることを使ってその場合を排除しない。
- 二つの三つ組の部分で、**どの**応手もうまくいかないことを証明する代わりに、$(6,0,3)$ や $(0,2,7)$ のような自然な応手をいくつか調べるだけで済ませてしまう。

STEP のその先へ

ブロットー大佐（Colonel Blotto）ゲームはゲーム理論（game theory）の古典である。ベティは完全な情報をもって後から手を選ぶので常に勝つ。そのため、興味深いのは両者が同時に手を選ぶ場合である。その場合、通常は最善の純粋戦略（pure strategy）は存在せず、解は**混合戦略**（mixed strategy）、すなわち三つ組全体の上の確率分布（probability distribution）となる。その存在はフォン・ノイマン（von Neumann）のミニマックス定理（minimax theorem）によって保証される。この問題の二つの三つ組の変種はその方向への第一歩である。アダムにとって最善の守りは、選択を複数の三つ組に分散させることだからである。同じ趣旨の問題については、Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題集）を参照せよ。混合戦略を支える確率の道具については、Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）を参照せよ。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。