解答例

STEP I 1993、第 9 問

純粋数学 ・ 一階微分方程式

> **STEP I 1993、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/93-s1-q9

鍵となる考え方

これは混合問題（mixing problem）である。容器内の A の量の変化率は（流入速度）から（流出速度）を引いたものであり、混合が速やかに行われるので、流出する液体の濃度（concentration）は容器内の濃度に等しい。まず気づくべきことは、各容器の液体の総体積がまったく変化しないことである。したがって濃度は単に「A の量を定数で割ったもの」になる。すると各容器について一階線形微分方程式（first-order linear differential equation）が得られ、第 1 の容器からの流出が第 2 の容器の強制項（forcing term）となる。

解答

第 1 の容器

第 1 の容器には液体が合計 $a + (b - a) = b$ リットル毎秒の速さで流入し、b リットル毎秒の速さで流出する。よって、その体積はすべての $t \geq 0$ に対して初期値 K リットルのまま一定である。

混合は速やかであるから、時刻 t において容器の中身は一様であり、液体のうち化学物質 A が占める割合は $V(t)/K$ である。短い時間 δt の間に、A が $a\,\delta t$ リットル流入し、混合液が $b\,\delta t$ リットル流出する。流出する混合液のうち A は $\frac{V}{K}\,b\,\delta t$ リットルである。したがって

$$\delta V \approx a\,\delta t - \frac{bV}{K}\,\delta t,$$

であり、δt で割って $\delta t \to 0$ とすると

$$\dot{V}(t) = -\frac{bV(t)}{K} + a,$$

となる。これが求める方程式である。

この方程式は定数係数（constant coefficients）の線形方程式である。$\dot{V} + \frac{b}{K}V = a$ と書き、積分因子（integrating factor）$\mathrm{e}^{bt/K}$ を掛けると

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(V\mathrm{e}^{bt/K}\right) = a\,\mathrm{e}^{bt/K} \quad \Longrightarrow \quad V\mathrm{e}^{bt/K} = \frac{aK}{b}\mathrm{e}^{bt/K} + C.$$

初めに容器には化学物質 B しか入っていないので $V(0) = 0$ であり、$C = -\frac{aK}{b}$ を得る。したがって

$$V(t) = \frac{aK}{b}(1 - \mathrm{e}^{-bt/K}), \qquad t \geq 0,$$

となり、示すべき式が得られた。

第 2 の容器

第 2 の容器は第 1 の容器から b リットル毎秒の液体を受け取り、b リットル毎秒の速さで排出するので、その体積は L リットルのまま一定である。時刻 t においてこの容器に含まれる A の体積を $W(t)$ とおくと、$W(0) = 0$ である。

考えてみよう 化学物質 A はどのような速さで第 2 の容器に流入するか。

A は第 1 の容器から流出するのとまったく同じ速さ、すなわち $\frac{bV}{K} = a(1 - \mathrm{e}^{-bt/K})$ で流入する。また、同じく速やかな混合の議論により、$\frac{bW}{L}$ の速さで流出する。よって

$$\dot{W} + \frac{b}{L}W = a - a\,\mathrm{e}^{-bt/K}.$$

積分因子 $\mathrm{e}^{bt/L}$ を掛けると

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(W\mathrm{e}^{bt/L}\right) = a\,\mathrm{e}^{bt/L} - a\,\mathrm{e}^{bt(1/L - 1/K)}.$$

$L \neq K$ であるから指数 $b(\frac{1}{L} - \frac{1}{K}) = \frac{b(K-L)}{KL}$ は 0 でなく、第 2 項を指数関数として積分できる：

$$W\mathrm{e}^{bt/L} = \frac{aL}{b}\mathrm{e}^{bt/L} - \frac{aKL}{b(K-L)}\mathrm{e}^{b(K-L)t/(KL)} + D.$$

両辺に $\mathrm{e}^{-bt/L}$ を掛け、$\frac{b(K-L)}{KL} - \frac{b}{L} = -\frac{b}{K}$ に注意すると

$$W = \frac{aL}{b} - \frac{aKL}{b(K-L)}\mathrm{e}^{-bt/K} + D\mathrm{e}^{-bt/L}.$$

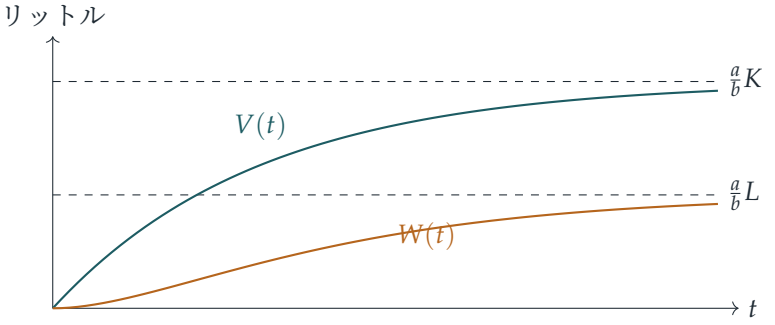
$W(0) = 0$ とおくと

$$D = \frac{aKL}{b(K-L)} - \frac{aL}{b} = \frac{aL}{b} \cdot \frac{K - (K-L)}{K-L} = \frac{aL^2}{b(K-L)}.$$

よって時刻 $t \geq 0$ において、第 2 の容器には化学物質 A が

$$\boxed{W(t) = \frac{aL}{b}\left(1 - \frac{Ke^{-bt/K} - Le^{-bt/L}}{K - L}\right)}$$

リットル含まれる。



この図は $a = 1$、$b = 2$、$K = 10$、$L = 5$ の場合である。W は傾き 0 で始まることに注意せよ。最初のうちは、第 1 の容器から流入する液体にほとんど A が含まれていないからである。

検算

- $t = 0$ において括弧内は $1 - \frac{K-L}{K-L} = 0$ となり、当然そうなるべき値である。また $\dot{W}(0) = 0$ であり、A が $bV(0)/K = 0$ の速さで流入するという事実と一致する。
- $t \to \infty$ のとき $V \to \frac{a}{b}K$、$W \to \frac{a}{b}L$ である。すなわち、どちらの容器も最終的に A の濃度が a/b となり、これは流入する液体の濃度に等しい。
- この式は前に掛かる因子 L を除けば K と L について対称であり、計算の整合性を確かめるよい目安となる。
- $a = 1$、$b = 2$、$K = 10$、$L = 5$、$t = 5$ のとき、$V = 5(1 - e^{-1}) \approx 3.1606$、$W = 2.5(1 - e^{-1})^2 \approx 0.99894$ である。両方の容器を（体積も追跡しながら）数値シミュレーションすると、a, b, K, L を多数無作為に選んだ場合について、どちらの式とも約 10^{-13} の精度で一致する。

よくある間違い

- A の流出量として $b - a$ や a を用いてしまう。A の流出量は、液体全体の流出速度に濃度を掛けたものである。

- 第 2 の容器への A の流入量を a としてしまう。第 2 の容器に届くのは、第 1 の容器から流出した A だけである。
- なぜ $L \neq K$ が必要なのかを忘れてしまう。$L = K$ ならば強制項 $\mathrm{e}^{-bt/K}$ は斉次方程式（homogeneous equation）の解となり、答えには代わりに $t\,\mathrm{e}^{-bt/K}$ の項が現れる。

STEP のその先へ

よく混合された容器を連ねたものは標準的なコンパートメントモデル（compartment model）であり、体内を移動する薬物の投与量や放射性崩壊系列の解析に用いられる。系を $\dot{\mathbf{x}} = M\mathbf{x} + \mathbf{f}$ の形に書くと、減衰率 b/K と b/L は M の固有値（eigenvalue）であり、$L = K$ の場合は重複固有値（repeated eigenvalue）となる。これは $t\,\mathrm{e}^{\lambda t}$ という形の解を生み出すのと同じ「共鳴」（resonance）である。Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations*（常微分方程式の入門書）は、混合問題と線形の系の両方をこのような方法で扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。