解答例

STEP I 1993、第 8 問

純粋数学 ・ 球とベクトル

> **STEP I 1993、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/93-s1-q8

鍵となる考え方

小問 (i) では、対称性（symmetry）のあるところに原点と座標軸を置く。球面（sphere）の中心が z 軸上にあり、平面（plane）が $z = 0$ であれば、方程式がほとんどすべてを片づけてくれる。球面が二つになっても難しさは変わらない。二つの方程式を引き算すると平方の項がすべて消え、**平面**の方程式が残るからである。小問 (ii) でも、座標を使えばすべてが内積（scalar product）の計算に帰着する。B を原点に置き、二本の柱の先端をどちらも E から測るようにする。

解答

小問 (i)

球面と平面。球面の中心を O'、半径を $r > 0$ とし、O' から平面に下ろした垂線の足（foot of the perpendicular）を N とする。N を原点とし、平面を $z = 0$、z 軸を NO' の方向にとる。すると $O' = (0, 0, d)$ である。ここで $d \geq 0$ は中心から平面までの距離である。球面の方程式は

$$x^2 + y^2 + (z - d)^2 = r^2,$$

であるから、点が球面と平面の両方の上にあるのは、$z = 0$ かつ

$$x^2 + y^2 = r^2 - d^2.$$

が成り立つときであり、またそのときに限る。

- $d < r$ のとき、これは平面上の中心 N、半径 $\sqrt{r^2 - d^2}$ の円である。
- $d = r$ のとき、$x^2 + y^2 = 0$ より $x = y = 0$ となるので、共通部分はただ一点 N であ

る（平面は接平面（tangent plane）である）。

▶ $d > r$ のとき、右辺は負であるから該当する点はなく、共通部分は空集合である。

これらの場合ですべての可能性が尽くされるので、最初の主張が証明された。

二つの球面。二つの球面の半径を $r, s > 0$ とし、異なる中心の間の距離を $c > 0$ とする。一つ目の中心を原点に、二つ目の中心を $(0, 0, c)$ に置く：

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2, \qquad x^2 + y^2 + (z - c)^2 = s^2.$$

考えてみよう 二つの二次方程式の解の集合が、どうしてちょうど一つの円になりうるのだろうか？

一つ目の方程式から二つ目の方程式を引く。平方の項はすべて消え、

$$2cz - c^2 = r^2 - s^2 \quad \Longleftrightarrow \quad z = h, \qquad \text{ただし} h = \frac{r^2 - s^2 + c^2}{2c}.$$

が残る。中心は異なるので、c で割ってよい。点が両方の球面上にあることは、その点が一つ目の球面上にあり、かつ差の方程式を満たすことと同値であるから、

$$(\text{球面 1}) \cap (\text{球面 2}) = (\text{球面 1}) \cap (\text{平面} z = h).$$

となる。最初の結果により、これは円、一点、または空集合である。（具体的には、$|h| < r$ のときは平面 $z = h$ 上の円 $x^2 + y^2 = r^2 - h^2$、$|h| = r$ のときはただ一点、$|h| > r$ のときは空集合である。）この円は中心どうしを結ぶ直線に垂直な平面上にあり、その中心はこの直線上にある。

小問 (ii)

柱の根元についての仮定。問題文には A、B、C がどこに立っているかが書かれていない。ここでは、これらが水平な地面上の一辺 2 m の正三角形（equilateral triangle）の頂点にあるとする。これが問題文の角度を与える配置である（「検算」を参照）。

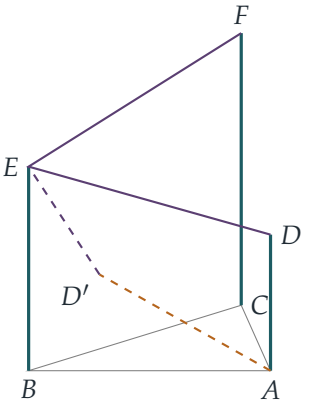
B を原点とし、z 軸を鉛直方向にとる：

$$B = (0, 0, 0), \quad A = (2, 0, 0), \quad C = (1, \sqrt{3}, 0),$$

すると柱の先端は

$$D = (2, 0, 2), \quad E = (0, 0, 3), \quad F = (1, \sqrt{3}, 4).$$

となる。



図において、D'（破線）は、いたずらをした者たちが柱を動かした後の D の位置である。

もとの彫刻。E を始点とするベクトルを用いると、

$$\overrightarrow{ED} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix},$$

であるから、$\overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{EF} = 2 + 0 - 1 = 1$、$|\overrightarrow{ED}| = |\overrightarrow{EF}| = \sqrt{5}$ である。したがって

$$\cos \angle DEF = \frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = \frac{1}{5}, \qquad \text{よって} \qquad \angle DEF = \cos^{-1} \tfrac{1}{5},$$

となり、求める結果が得られた。

いたずらの後。柱 AD の長さは 2 のままであり、根元も A のままである。柱はいま A と B を通る鉛直平面（平面 $y = 0$）内にあり、地面に対して $\frac{1}{4}\pi$ の角をなして B の方へ傾いている。A から B へ向かう向きは $-x$ の向きであるから、

$$D' = \left(2 - 2\cos \tfrac{\pi}{4},\ 0,\ 2\sin \tfrac{\pi}{4}\right) = \left(2 - \sqrt{2},\ 0,\ \sqrt{2}\right).$$

である。$2 - \sqrt{2} \approx 0.59$ は 0 と 2 の間にあるので、点 D' は確かに線分 AB の上方にある。ここで

$$\overrightarrow{ED'} = \begin{pmatrix} 2 - \sqrt{2} \\ 0 \\ \sqrt{2} - 3 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{ED'} \cdot \overrightarrow{EF} = (2 - \sqrt{2}) + (\sqrt{2} - 3) = -1,$$

であり、

$$|\overrightarrow{ED'}|^2 = (2 - \sqrt{2})^2 + (3 - \sqrt{2})^2 = (6 - 4\sqrt{2}) + (11 - 6\sqrt{2}) = 17 - 10\sqrt{2}.$$

である。

考えてみよう 内積が負になった。このことから角について何がわかるだろうか？

内積が負であることは角が鈍角（obtuse）であることを意味するので、$\cos^{-1}$ の値として $\frac{1}{2}\pi$ と π の間にあるものをとる必要がある：

$$\cos\angle D'EF = \frac{-1}{\sqrt{5}\sqrt{17-10\sqrt{2}}} = \frac{-1}{\sqrt{85-50\sqrt{2}}} \approx -0.264542,$$
$$\angle D'EF \approx 1.839 \text{ ラジアン（有効数字 } 4 \text{ 桁）}.$$

検算

- 底面が一辺 s の正三角形のとき、同じ方法により $\cos\angle DEF = \dfrac{s^2/2-1}{s^2+1}$ が得られる。これが $\frac{1}{5}$ に等しくなるのは $s=2$ のときに限るので、仮定した底面の配置が裏づけられる。数値計算でも、$s=2$ のとき $\cos\angle DEF = 0.2$ となることを確認した。
- $|AD'|=2$ と $\angle BAD' = \frac{1}{4}\pi$ を数値的に確認した。新しい角は 1.838525… ラジアン（約 105.3°）となり、上の厳密な式と一致した。
- 小問 (i)：無作為に選んだ球面について、予測される円上の点を調べたところ、それらは誤差 10^{-12} 以内で両方の曲面上にあった。

よくある間違い

- 二つの球面の場合に、方程式の差が共通部分**そのもの**であると主張してしまうこと。平面は共通部分を含むにすぎず、さらにその平面と一方の球面との共通部分をとる必要がある。
- D' を A に関して B と反対側に置いてしまうこと。その点は線分 AB の上方になく、異なる角を与えてしまう。
- 答えを度数法で答えたり、負の符号を落として鋭角 $\cos^{-1}(0.2645)$ として答えたりすること。

STEP のその先へ

二つの球面の方程式を引き算して平面を得るという考え方は、二つの円や球面の**根平面**（radical plane）（二次元では根軸（radical axis））の背後にある考え方である。同じ工夫により、GPS 型の三辺測量（trilateration）は線形の問題に帰着される。より一

般に、任意の二次曲面（quadric surface）と平面の共通部分は円錐曲線（conic）であり、そのような共通部分を分類することは、二次形式（quadratic forms）を用いた線形代数（linear algebra）の最初の演習としてよい題材である。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）はそのための道具を展開しており、Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題）には STEP 風の座標幾何の問題がさらに収められている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。