解答例

STEP I 1993、第 7 問

純粋数学 • 3 次式の根

> **STEP I 1993、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/93-s1-q7

鍵となる考え方

最高次の係数（leading coefficient）が正の三次関数（cubic）は $-\infty$ から $+\infty$ まで増加していくので、その根についての性質はすべて二つの極値点（turning point）で決まる。曲線の極大値（local maximum）が軸より上にあり、極小値（local minimum）が軸より下にあれば、グラフは必ず三回交わる。そうでなければ交わる回数はそれより少ない。$x^3 + ax^2 + b$ の場合は、導関数（derivative）が因数分解できるので、極値点を正確に求めるのは容易である。

解答

極値点

$\mathrm{f}(x) = x^3 + Ax^2 + B$ に対して

$$\mathrm{f}'(x) = 3x^2 + 2Ax = x(3x + 2A),$$

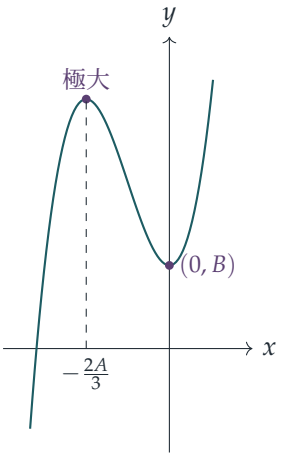
であるから、停留点（stationary point）は $x = 0$ と $x = -\frac{2A}{3}$ にある。そこでの値は $\mathrm{f}(0) = B$ および

$$\mathrm{f}\left(-\tfrac{2A}{3}\right) = -\frac{8A^3}{27} + \frac{4A^3}{9} + B = \frac{4A^3}{27} + B.$$

である。また $\mathrm{f}''(x) = 6x + 2A$ より $\mathrm{f}''(0) = 2A$、$\mathrm{f}''(-\frac{2A}{3}) = -2A$ である。$A > 0$ のときは $x = 0$ の点が極小、$x = -\frac{2A}{3}$ の点が極大となり、$A < 0$ のときはその役割が入れ替わる。

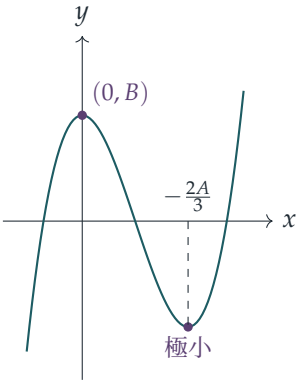
$A > 0$、$B > 0$ の場合の概形

極大点は $(-\frac{2A}{3}, B + \frac{4A^3}{27})$ にあり、y 軸の左側で、高さは B より大きい。極小点は $(0, B)$ にあり、y 軸の正の部分の上にある。二つの極値点がともに x 軸より上にあるので、曲線は x 軸とちょうど一回、極大点より左で交わる。（図では $A = 3$、$B = 2$ とした。極大点は $(-2, 6)$、極小点は $(0, 2)$ である。）



$A < 0$、$B > 0$ の場合の概形

今度は極大点が $(0, B)$ にあり、極小点は $\left(-\frac{2A}{3}, B + \frac{4A^3}{27}\right)$ にあって y 軸の右側に位置する。$A^3 < 0$ であるから極小値は B より小さく、正にも 0 にも負にもなりうる。$\mathrm{f}(0) = B > 0$ であり、$x \to -\infty$ のとき $\mathrm{f} \to -\infty$ であるから、$x < 0$ の根が常に一つ存在する。極小値が軸より下にあれば、$x > 0$ にさらに二つの根がある（図の $A = -3$、$B = 2$ の場合がそうで、極小点は $(2, -2)$、根は $1 - \sqrt{3}$、1、$1 + \sqrt{3}$ である）。極小値がちょうど軸上にあれば、曲線はそこで軸に接する。極小値が軸より上にあれば、負の根がただ一つの根である。



根の個数を数える

次に $\mathrm{g}(x) = x^3 + ax^2 + b$ を考える。$a = 0$ ならば g は狭義単調増加である（導関数 $3x^2$ が 0 になるのは 0 においてのみである）から、実根をちょうど一つもつ。そこで $a \neq 0$ と仮定する。上の計算から、g は相異なる二つの極値点をもち、そこでの値は b と $b + \frac{4a^3}{27}$ である。

考えてみよう 二つの極値の値から、根の個数はどのようにわかるだろうか？

極値点を $x_1 < x_2$ とおく。この三次関数は $(-\infty, x_1]$ で狭義単調増加、$[x_1, x_2]$ で狭義単調減少、$[x_2, \infty)$ で狭義単調増加であるから、各区間にもつ根は高々一つである。$\mathrm{g}(x_1) > 0 > \mathrm{g}(x_2)$ ならば、中間値の定理（intermediate value theorem）により（$x \to \mp\infty$ のとき $\mathrm{g} \to \mp\infty$ であることを用いて）、$(-\infty, x_1)$、(x_1, x_2)、(x_2, ∞) のそれぞれに根が存在するので、相異なる根は三つある。そうではなく二つの値が同符号であるか、いずれかが 0 であれば、少なくとも一つの区間はその内部に根をもたず、根の個数は高々二つである。極大値は常に二つの値のうち大きい方であるから、「一方が正で他方が負」は「両者の積が負」と同じことである。したがって、g が相異なる三つの実根をもつのは、ちょうど

$$b\left(b + \frac{4a^3}{27}\right) < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 27b^2 + 4a^3 b < 0.$$

のときである。（$27 > 0$ を掛けても不等号の向きは変わらない。）これは $a = 0$ の場合も含んでいる。そのときは $27b^2 + 4a^3 b = 27b^2 \geq 0$ となるからである。

第一の条件

$27b^2 + 3a^3 b < 0$ と仮定する。すると $3a^3 b < -27b^2 \leq 0$ であるから $a^3 b < 0$ であり、したがって

$$27b^2 + 4a^3 b = \left(27b^2 + 3a^3 b\right) + a^3 b < 0 + 0 = 0.$$

となる。上の判定法により、方程式は相異なる三つの実根をもつ。これが示すべきことであった。

第二の条件

問題文のとおりでは、第二の条件は不等式 $27b^2 + 4a^3 b < 0$ を繰り返しているだけであり、「$<$」のままではこの主張は偽である。実際、$a = -3$、$b = 1$ とすると $27 - 108 = -81 < 0$ となるが、$x^3 - 3x^2 + 1$ は $x = 0$ で値 1、$x = 2$ で値 -3 をとるので、相異なる三つの実根をもつ。意図された不等式は逆向きのものに違いない。判定法により、

$$27b^2 + 4a^3 b > 0$$

（さらには $27b^2 + 4a^3b \geq 0$）であれば、方程式の相異なる実根は三つより少ない。以上で問題は完結する。

よって、正確な境界は $27b^2 + 4a^3b = 0$ である。$3a^3$ を含む条件は、三つの根をもつための十分条件（sufficient condition）ではあるが必要条件（necessary condition）ではない。$a = -2$、$b = 1$ とすると $27b^2 + 3a^3b = 3 > 0$ であるが $27b^2 + 4a^3b = -5 < 0$ であり、実際 $x^3 - 2x^2 + 1 = (x-1)(x^2 - x - 1)$ は三つの根 1 と $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ をもつ。

検算

$A = -3$、$B = 2$ とすると $x^3 - 3x^2 + 2 = (x-1)(x^2 - 2x - 2)$ となり、その根 1、$1 \pm \sqrt{3}$ は概形と一致する。また $27 \cdot 4 + 4(-27)(2) = -108 < 0$ であり、判定法の予測どおりである。数値的にも、第一の条件を満たすランダムな有理数の組 (a, b) 約 80,000 個について、停留値は常に異符号であった。200,000 組にわたって、「相異なる三つの根をもつ」ことは $27b^2 + 4a^3b < 0$ と完全に一致した。

よくある間違い

- $a = 0$ の場合を忘れること。このとき二つの極値点は一つに重なり、変曲点（point of inflection）となる。
- 極値が 0 になる場合を三つの根を与えると扱うこと。このときは重根（repeated root）が生じるので、相異なる根は二つしかない。
- 第二の主張を、判定法と矛盾していることに気づかず、問題文のとおりに証明しようとすること。

STEP のその先へ

量 $-(4a^3b + 27b^2)$ は $x^3 + ax^2 + b$ の**判別式**（discriminant）であり、$b^2 - 4ac$ の三次版である。これは根の差の二乗の積に等しいので、相異なる三つの実根をもつときは正、重根をもつときは 0、二つの根が虚数のときは負となる。判別式や根の対称式（symmetric functions）はガロア理論（Galois theory）の中で展開される。Allenby の *Rings, Fields and Groups*（『環・体・群』）はよい入門書である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。