解答例

STEP I 1993、第 6 問

純粋数学 ・ 曲線の概形

> **STEP I 1993、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/93-s1-q6

鍵となる考え方

すべては、$N = 10^{100}$ のとき x^N がどう振る舞うかにかかっている。$|x| < 1$ ならば、たとえ 1 をわずかに下回るだけでも x^N は想像を絶するほど小さい。$|x| > 1$ ならば、たとえ 1 をわずかに上回るだけでも想像を絶するほど大きい。そして $x = \pm 1$ ではちょうど 1 である（N が偶数だからである）。したがって分数 $x^N/(1+x^N)$ はスイッチ（switch）のように振る舞う。$(-1, 1)$ の内側では 0、外側では 1 である。h については逆の考え方になる。$10^{-N}x$ は非常に小さいので、sin はその引数と区別がつかない。

解答

以下を通して、次のようにおく。

$$s(x) = \frac{x^N}{1+x^N} = \frac{1}{1+x^{-N}} \quad (x \neq 0), \qquad s(0) = 0,$$

すると $\mathrm{f}(x) = 2 + s(x)$、$\mathrm{g}(x) = x\,s(x)$ である。

f の特徴

- **対称性と値域（*range*）。** N は偶数なので $x^N = (-x)^N \geq 0$ である。よって f は偶関数（even function）であり、$0 \leq s(x) < 1$ から $2 \leq \mathrm{f}(x) < 3$ が得られる。
- **$|x| < 1$ における高さ $y = 2$。** ここでは $x^N \to 0$ が驚異的な速さで起こる。例えば $0.99^N = 10^{N \log_{10} 0.99} \approx 10^{-4.4 \times 10^{97}}$ である。したがって $s(x) \approx x^N$ はグラフで表せるどんな量よりもはるかに小さく、目に見える精度では $\mathrm{f}(x) = 2$ である。厳密には $\mathrm{f}(0) = 2$ である。

- $|x| > 1$ における高さ $y = 3$。今度は x^{-N} が同じくらい小さいので、$s(x) = 1/(1+x^{-N})$ は目に見える精度で 1 であり、$\mathrm{f}(x) = 3$ となる（下から近づく）。（実際、直線 $y = 3$ は $|x| \to \infty$ のときの漸近線（asymptote）である。）
- $x = \pm 1$ での跳び。$x = \pm 1$ では $x^N = 1$ なので $\mathrm{f}(\pm 1) = \frac{5}{2}$ であり、ちょうど中間の高さである。この関数は連続（continuous）かつ微分可能（differentiable）なので、概形図の鉛直な線分は実際には極めて急な上昇である。微分すると

$$\mathrm{f}'(x) = \frac{Nx^{N-1}}{(1+x^N)^2}, \qquad \mathrm{f}'(1) = \frac{N}{4} = 2.5 \times 10^{99}.$$

考えてみよう グラフの「鉛直な」部分の幅はどれほど狭いか？

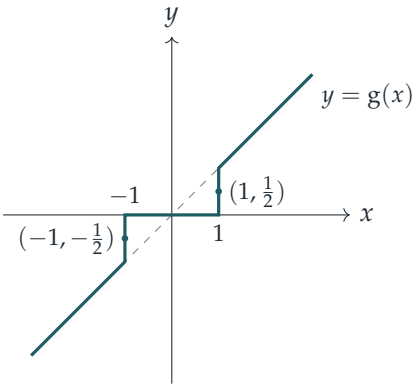
$x = 1 + \delta$（δ は小さい）とおくと、$x^N = \mathrm{e}^{N\ln(1+\delta)} \approx \mathrm{e}^{N\delta}$、$s(x) \approx 1/(1+\mathrm{e}^{-N\delta})$ となる。これは $N\delta$ が $-\ln 99$ から $\ln 99$ まで動く間に 0.01 から 0.99 まで上昇する。すなわち、幅およそ 9×10^{-100} の区間で上昇する。どんな図においても、これは鉛直な線になる。対称性により、$x = -1$ でも同じことが起こる。（また、x^{N-1} は x と同符号なので、f' の符号から、f は $x > 0$ で増加し、$x < 0$ で減少することもわかる。）

g のグラフ

$\mathrm{g}(x) = x\,s(x)$ なので、今度はスイッチ s が直線 $y = x$ に掛けられる。

- $|x| < 1$ では $s(x)$ は無視できるので、目に見える精度で $\mathrm{g}(x) = 0$ である（$x = 0$ では厳密に 0）。
- $|x| > 1$ では $s(x)$ は目に見える精度で 1 なので、$\mathrm{g}(x) = x$ である。正確には $x - \mathrm{g}(x) = \dfrac{x}{1+x^N}$ であり、これは無視できる。
- $x = \pm 1$ では $\mathrm{g}(\pm 1) = \pm\frac{1}{2}$ であり、それぞれの跳びのちょうど中間である。

s は偶関数、x は奇関数なので、g は奇関数（odd function）である。また増加関数でもある。実際 $\mathrm{g}'(x) = s(x) + x\,s'(x)$ であり、x と $s'(x)$ は同符号なので、両方の項が ≥ 0 である。$x = 1$ での傾きは $\mathrm{g}'(1) = \frac{1}{2} + \frac{N}{4}$ なので、ここでも見かけ上鉛直な跳びが現れる。今回は $x = 1$ で 0 から 1 へ、$x = -1$ で -1 から 0 へ上がる。



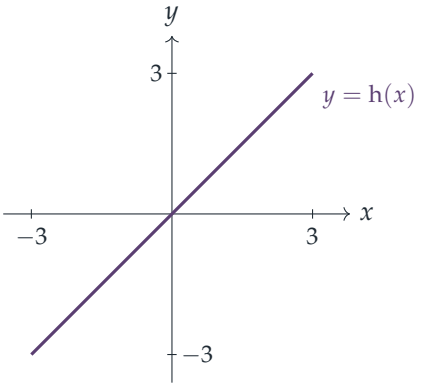
$[-3,3]$ 上の g の概形。$(-1,1)$ 上では零、その外側では直線 $y=x$（破線）であり、両者は $(\pm1,\pm\frac{1}{2})$ を通るほぼ鉛直な上昇でつながっている。

h のグラフ

$u=10^{-N}x$ とおく。$|x|\le 3$ のとき $|u|\le 3\times 10^{-N}$ であり、これは途方もなく小さい。小さい u に対して $\sin u = u-\frac{u^3}{6}+\cdots$ であり、$u>0$ では評価 $u-\frac{u^3}{6}\le \sin u\le u$ が成り立つ。10^N を掛けると、$0\le x\le 3$ に対して

$$0\le x-\mathrm{h}(x)\le \frac{x^3}{6}10^{-2N}\le \frac{27}{6}\times 10^{-2N},$$

であり、h は奇関数なので、$-3\le x\le 0$ に対しても符号を逆にして同じことが成り立つ。したがって $[-3,3]$ 上で h のグラフは、考えうるどんな精度でも原点を通る直線 $y=x$ であり、$x>0$ ではそのごくわずか下に、$x<0$ ではごくわずか上にある。傾きは $\mathrm{h}'(x)=\cos(10^{-N}x)$ であり、誤差およそ 10^{-2N} 以内で 1 に等しい。



正弦波は依然として存在するが、とてつもなく引き伸ばされている。最初の極大は $x=\frac{\pi}{2}\times 10^N$ にあり、その高さは 10^N である。そのため、窓 $[-3,3]$ に見えるのは、原点を通るまっすぐに見えるごく小さな部分だけである。

検算

- $s = 1/(1+\mathrm{e}^{-N\ln|x|})$ を用いて直接計算すると、$s(0.999)$ と $s(1.001)$ は機械精度でそれぞれ 0 と 1 であり、$s(\pm 1) = \frac{1}{2}$ は厳密に成り立つ。
- $N = 10$ や 200 のような控えめな N では、数値微分により $s'(1) = N/4$ と $\mathrm{g}'(1) = \frac{1}{2} + N/4$ が確認でき、細かい格子で調べると g が $[-3,3]$ 上で増加することがわかる。N を大きくしても段差が鋭くなるだけである。
- ランダムな $x \in [-3,3]$ に対して、$10^{100}\sin(10^{-100}x)$ は倍精度の全桁で x と一致する。また、縮小版の類似物 $M\sin(x/M)$（$M = 1000$）は評価 $0 < x - M\sin(x/M) \leq x^3/(6M^2)$ を満たす。

よくある間違い

- N が偶数であることを忘れる。x^N は $x < -1$ でも巨大で**正**なので、そこでも f は 3 であり、それ以外の値にはならない。
- 段差を本物の不連続点として述べてしまう。3 つの関数はすべて連続（実際には微分可能）であり、上昇が急すぎて描けないだけである。
- h を振動するグラフとして扱う。$[-3,3]$ 上では、極値点（turning point）にはまったく近づかない。

STEP のその先へ

関数 $x^n/(1+x^n)$ は、偶数値をとりながら $n \to \infty$ とするとき、$(-1,1)$ の内側で 0、± 1 で $\frac{1}{2}$、外側で 1 となる階段関数（step function）に**各点収束**（pointwise convergence）する。つまり、滑らかな関数の列でありながら、その極限は不連続なのである。これは、解析学者がなぜ**一様**収束（uniform convergence）を必要とするのかを示す古典的な例であり、一様収束は実解析（real analysis）の最初の講義における中心的な概念である。関数 h はその裏側を示している。$M \to \infty$ のとき、有界区間上で $M\sin(x/M) \to x$ は一様収束する。Abbott の *Understanding Analysis* は、この二つの考え方をとても読みやすく扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。