解答例

STEP I 1993、第 5 問

純粋数学 • 絶対値と三角不等式

STEP I 1993、問 5

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/93-s1-q5

鍵となる考え方

すべては三角不等式（triangle inequality）に基づいている。和の長さは長さの和以下である。これを項ごとに適用すると、多項式は $|z|$ の等比級数（geometric series）で上から抑えられ、$|z| \leq \frac{1}{2}$ のもとではその級数は厳密に 1 より小さいままである。根（root）では多項式部分が -1 に等しくならなければならず、これは絶対値（modulus）がちょうど 1 である。したがって、根は円板 $|z| \leq \frac{1}{2}$ の中にはありえない。

解答

絶対値と積の法則

x, y を実数として $z = x + \mathrm{i}y$ とすると、その絶対値は原点から点 (x, y) までの距離である。

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \text{(非負の平方根)}.$$

a, b, c, d を実数として $z_1 = a + \mathrm{i}b$、$z_2 = c + \mathrm{i}d$ とする。このとき $z_1 z_2 = (ac - bd) + \mathrm{i}(ad + bc)$ であるから、

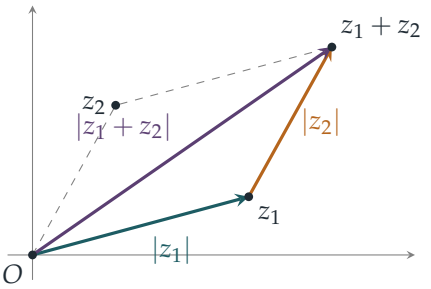
$$\begin{aligned} |z_1 z_2|^2 &= (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 \\ &= a^2c^2 - 2abcd + b^2d^2 + a^2d^2 + 2abcd + b^2c^2 \\ &= a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 \\ &= (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = |z_1|^2 |z_2|^2. \end{aligned}$$

$|z_1 z_2|$ と $|z_1||z_2|$ はともに非負であるから、平方根をとって $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ を得る。これが示すべきことであった。

三角不等式

複素平面（Argand diagram）において、原点を O、点 z_1 を A、点 z_1+z_2 を C とする。このとき $\overrightarrow{AC}$ は z_2 を表す（O から z_2 へのベクトルと同じベクトルである）。よって OAC は次の辺の長さをもつ三角形である。

$$OA = |z_1|, \qquad AC = |z_2|, \qquad OC = |z_1+z_2|.$$



2点を結ぶ最短の経路は線分である。O から C へ直接行く経路は、A を経由する経路より長くはない。よって

$$|z_1+z_2| \le |z_1| + |z_2|,$$

が成り立つ。等号が成り立つのは、O、A、C が一直線上にあり A がその間にあるとき、すなわち z_1 と z_2 が同じ向きを向いているとき（またはどちらか一方が 0 のとき）に限る。

代数的に示したければ、共役複素数（conjugate）を $\bar{z}$ で表すと、

$$\begin{aligned} |z_1+z_2|^2 &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) \\ &\le |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| = (|z_1|+|z_2|)^2, \end{aligned}$$

となる。複素数の実部はその絶対値以下であり、また積の法則により $|z_1\bar{z}_2| = |z_1||z_2|$ だからである。

この不等式を繰り返し適用すると（項数に関する簡単な数学的帰納法（induction）による）、任意の複素数 $w_1, \ldots, w_n$ に対して

$$|w_1 + w_2 + \cdots + w_n| \le |w_1| + |w_2| + \cdots + |w_n|$$

が成り立つ。

多項式の評価

各 j について $|a_j| \leq 1$ であり、$|z| \leq \frac{1}{2}$ であるとする。このとき

$$\begin{aligned}\left|a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z\right| &\leq |a_n||z|^n + |a_{n-1}||z|^{n-1} + \cdots + |a_1||z| \\ &\leq |z|^n + |z|^{n-1} + \cdots + |z| \\ &\leq \left(\tfrac{1}{2}\right)^n + \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1} + \cdots + \tfrac{1}{2} \\ &= 1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^n \\ &< 1.\end{aligned}$$

1 行目は n 項の三角不等式と積の法則（繰り返し用いて $|a_k z^k| = |a_k||z|^k$ とする）による。2 行目では $|a_j| \leq 1$ を、3 行目では $0 \leq |z| \leq \frac{1}{2}$ を用い、4 行目では有限等比級数の和を計算している。これが求める狭義の不等式（strict inequality）である。

> **考えてみよう** 狭義の不等式はどこから来るのか。上の各段階は「$\leq$」にすぎない。

それは有限等比級数から来る。$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}$ は 1 にちょうど $\frac{1}{2^n} > 0$ だけ足りない。この差こそが、結論を導くのに必要なものである。

根

（問題文の最後の行には $|x| > \frac{1}{2}$ とあるが、これは明らかに $|w| > \frac{1}{2}$ の誤植である。議論の対象となっている根は w だからである。）

w を根とすると、

$$a_n w^n + a_{n-1}w^{n-1} + \cdots + a_1 w = -1, \qquad \text{したがって} \qquad |a_n w^n + \cdots + a_1 w| = |-1| = 1.$$

背理法（proof by contradiction）により、$|w| \leq \frac{1}{2}$ と仮定する。このとき前の部分で $z = w$ とすると $|a_n w^n + \cdots + a_1 w| < 1$ となり、絶対値がちょうど 1 であることに矛盾する。したがって、すべての根は $|w| > \frac{1}{2}$ を満たす。

検算

- この評価は極限において達成される。すべての $a_j = 1$ とし $z = \frac{1}{2}$ とすると、左辺はちょうど $1 - 2^{-n}$ となる。
- 根に関する結果も最良である。すべての $a_j = -1$ とすると $1 - z - z^2 - \cdots - z^n = 0$ となり、その正の根は $n = 1$ のとき 1、$n = 2$ のとき 0.618（黄金比の共役（golden

ratio conjugate))、$n = 5$ のとき 0.5087、$n = 10$ のとき 0.50025 である。常に $\frac{1}{2}$ より大きいが、そこへ近づいていく。

- 数値的にも、単位円板内の a_j と半径 $\frac{1}{2}$ の円板内の z を無作為に 50 000 通り選んで試し（見つかった最大値は 0.79）、さらにそのような無作為な多項式 2000 個のすべての根を求めた。根の絶対値の最小値は 0.562 であった。

よくある間違い

- $|a_1 z + \cdots + a_n z^n| = |a_1||z| + \cdots + |a_n||z|^n$ と書いてしまう。三角不等式から得られるのは「$\leq$」だけである。
- 無限和 $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots = 1$ を使ってしまう。これでは ≤ 1 しか得られず、結論が導けなくなる。有限和を使うこと。
- $|z^k| = |z|^k$ の根拠を示し忘れる。これは直前に証明した積の法則から従う。

STEP のその先へ

これは、数値的な求根法を支える多項式の根の評価の初歩版である。コーシー（Cauchy）の評価は、多項式のすべての根を、係数の大きさだけで決まる半径の円板の中に収める。また、同じ「支配的な項が勝つ」という議論は、複素解析（complex analysis）におけるルーシェの定理（Rouché's theorem）の原動力となっている。三角不等式そのものは**距離**（metric）を定義する性質であり、距離は大学 1 年次の解析学の中心にある抽象的な概念である。これらすべてを美しく幾何的に扱ったものとして、Needham, *Visual Complex Analysis*（視覚で捉える複素解析）を読むとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。