解答例

STEP I 1993、第 4 問

純粋数学 ・ 置換積分

> **STEP I 1993、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/93-s1-q4

鍵となる考え方

置換 (substitution) $t = \pi - x$ は区間 $[0, \pi]$ をそれ自身に折り返し、しかも $\sin(\pi - t) = \sin t$ であるから $\sin x$ を変えない。そのため厄介な因子 x は $\pi - t$ に変わり、求めたい積分が右辺にマイナス符号付きで再び現れる。これにより、その積分について解くことができる。後に続く積分では、主な作業は $1 + \cos^2 x$ を $\sin x$ で表すことである。$[\pi, 2\pi]$ 上では、π だけずらすことで $[0, \pi]$ に戻すことができる。

解答

一般的な結果

$I = \int_0^\pi x\,\mathrm{f}(\sin x)\,\mathrm{d}x$ とおき、$t = \pi - x$ とする。このとき $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$ である。$x = 0$ のとき $t = \pi$、$x = \pi$ のとき $t = 0$ である。また $\sin x = \sin(\pi - t) = \sin t$ である。よって

$$\begin{aligned} I &= \int_\pi^0 (\pi - t)\,\mathrm{f}(\sin t)\,(-\mathrm{d}t) = \int_0^\pi (\pi - t)\,\mathrm{f}(\sin t)\,\mathrm{d}t \\ &= \pi \int_0^\pi \mathrm{f}(\sin t)\,\mathrm{d}t - \int_0^\pi t\,\mathrm{f}(\sin t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

積分変数の名前は関係ないので、最後の積分は再び I である。したがって $2I = \pi \int_0^\pi \mathrm{f}(\sin t)\,\mathrm{d}t$ となり、

$$\int_0^\pi x\,\mathrm{f}(\sin x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \mathrm{f}(\sin x)\,\mathrm{d}x,$$

が示された。(積分が存在することが必要であり、たとえば f が $[-1, 1]$ 上で連続であればよい。)

$[0,\pi]$ 上の積分

考えてみよう 被積分関数（integrand）には $\sin x$ だけでなく $\cos^2 x$ も含まれている。これは本当に $x\,\mathrm{f}(\sin x)$ の形をしているだろうか？

している。$\cos^2 x = 1-\sin^2 x$ であるから $1+\cos^2 x = 2-\sin^2 x$ となり、

$$\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x} = x\,\mathrm{f}(\sin x) \qquad \text{ただし} \qquad \mathrm{f}(s) = \frac{s}{2-s^2},$$

であって、f は $[-1,1]$ 上で連続である。一般的な結果により、

$$\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x.$$

残った積分は、$\sin x$ が $\cos x$ の導関数（derivative）の -1 倍であるから易しい。$u=\cos x$、$\mathrm{d}u = -\sin x\,\mathrm{d}x$ と置換すると、

$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int_1^{-1} \frac{-\mathrm{d}u}{1+u^2} = \int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \Big[\arctan u\Big]_{-1}^1 = \frac{\pi}{4} - \Big(-\frac{\pi}{4}\Big) = \frac{\pi}{2}.$$

したがって

$$\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}.$$

$[0,2\pi]$ 上の積分

一般的な結果は $[0,\pi]$ にしか適用できないので、積分範囲を分割する：

$$\int_0^{2\pi} = \int_0^\pi + \int_\pi^{2\pi}.$$

考えてみよう $\int_\pi^{2\pi}$ を $[0,\pi]$ 上の積分に戻すにはどうすればよいか？

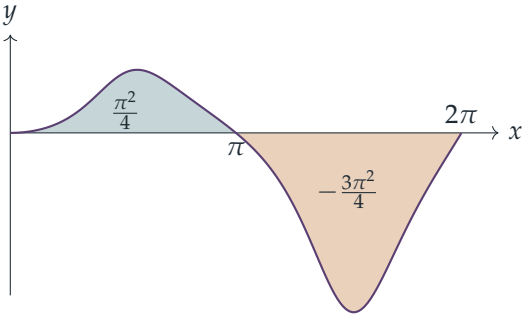
π だけずらす。$x = u+\pi$ とおくと、u は 0 から π まで動く。このとき $\sin x = -\sin u$、$\cos x = -\cos u$ であるから $\cos^2 x = \cos^2 u$ である。よって

$$\begin{aligned}\int_\pi^{2\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x &= \int_0^\pi \frac{(u+\pi)(-\sin u)}{1+\cos^2 u}\,\mathrm{d}u \\ &= -\int_0^\pi \frac{u\sin u}{1+\cos^2 u}\,\mathrm{d}u - \pi\int_0^\pi \frac{\sin u}{1+\cos^2 u}\,\mathrm{d}u \\ &= -\frac{\pi^2}{4} - \pi\cdot\frac{\pi}{2} = -\frac{3\pi^2}{4},\end{aligned}$$

ここで前の小問の二つの結果を用いた。二つの部分を足し合わせると、

$$\int_0^{2\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{4} - \frac{3\pi^2}{4} = -\frac{\pi^2}{2}.$$

答えが負になる理由はグラフからわかる。$[\pi, 2\pi]$ 上では因子 $\sin x$ が負であり、しかもそこでは因子 x が $[0, \pi]$ 上より大きい。そのため、軸より下の面積が軸より上の面積を上回るのである。



検算

- $\mathrm{f} \equiv 1$ とすると、一般的な結果は $\int_0^\pi x \, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \cdot \pi = \frac{\pi^2}{2}$ を与え、これは正しい。
- 被積分関数は $(0, \pi)$ 上で正であるから、一つ目の答えは正でなければならず、実際 $\pi^2/4 \approx 2.467$ は正である。シンプソンの公式（Simpson's rule）によると一つ目の積分は 2.4674011、二つ目の積分は -4.9348022 となり、$\pi^2/4$ および $-\pi^2/2$ と一致する。
- 一般的な恒等式も、f をいくつか無作為に選んで数値的に確かめられる。

よくある間違い

- 一般的な結果を $[0, 2\pi]$ 上でそのまま適用してしまう。この結果は折り返し $x \mapsto \pi - x$ が区間をそれ自身に写すことに依存しており、$[0, 2\pi]$ 上で用いると誤った答え $\frac{\pi}{2} \cdot 0 = 0$ を与える（そこでの正しい折り返しは $x \mapsto 2\pi - x$ であり、これによって $\sin x$ は符号を変える）。
- $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$ のマイナス符号を落とす、あるいは積分の上端と下端を入れ替えて戻すのを忘れる。
- $\arctan(-1) = 3\pi/4$ と書いてしまう。逆正接関数（arctangent）の値は $(-\pi/2, \pi/2)$ に含まれるので、$\arctan(-1) = -\pi/4$ である。

STEP のその先へ

ここでの工夫は、被積分関数がほぼ保つような積分範囲の対称性（symmetry）を利用すること、すなわち x を $\pi - x$ で置き換え、積分の二つの表示を平均することである。同じ考え方により、積分計算をまったくせずに $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$ が得られる。大学では、このような対称性による議論は解析学（analysis）の至るところに現れ、フーリエ級数（Fourier series）においても関数の偶奇性（parity）がどの項が残るかを決める。Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題）にはこの種の置換を用いる STEP 形式の演習がさらに収められており、Abbott の *Understanding Analysis*（解析学を理解する）では変数変換（change of variables）の公式が厳密に扱われている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。