解答例

STEP I 1993、第 3 問

純粋数学 ・ ディオファントス方程式

> **STEP I 1993、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/93-s1-q3

鍵となる考え方

$p \le q \le r$ であるから、逆数（reciprocal）$\frac{1}{p}$ は 3 つの項のうち**最大**のものである。したがって和は高々 $\frac{3}{p}$ であり、これにより p はわずか 2 つほどの値に絞られる。p を固定すれば、残りの 2 項に同じ工夫を施すことで q が抑えられ、さらに r が決まる。要するに、大小関係を用いて、3 つの未知数を含む方程式（あるいは不等式（inequality））を、短い有限個の場合の確認に帰着させるという考え方である。

解答

小問 (i)

$1 \le p \le q \le r$ であるから、$\frac{1}{r} \le \frac{1}{q} \le \frac{1}{p}$ が成り立つ。よって

$$1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \le \frac{3}{p},$$

となり、$p \le 3$ を得る。また $p \neq 1$ である。なぜなら、$p = 1$ とすると $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 0$ となるが、これは正の q, r に対しては不可能だからである。したがって $p = 2$ または $p = 3$ である。

$p = 2$ の場合。このとき $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{1}{2}$ である。$\frac{1}{r} \le \frac{1}{q}$ であるから

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \le \frac{2}{q} \quad \Longrightarrow \quad q \le 4,$$

であり、また $\frac{1}{r} > 0$ より $\frac{1}{q} < \frac{1}{2}$ でなければならないので、$q \ge 3$ である。

- $q = 3$：$\frac{1}{r} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ より $r = 6$。

▶ $q=4$：$\frac{1}{r}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$ より $r=4$。

$p=3$ の場合。このとき $\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=\frac{2}{3}\le\frac{2}{q}$ であるから $q\le 3$ である。$q\ge p=3$ と合わせると $q=3$ に限られ、すると $\frac{1}{r}=\frac{1}{3}$ より $r=3$ である。

すべての場合を調べ尽くしたので、解は

$$(p,q,r)=(2,3,6),\quad (2,4,4),\quad (3,3,3),$$

のみであり、これ以外には存在しない。

小問 (ii)

$p=1$ ならば、任意の q と r に対して和は $1+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}>1$ となる。これが問題文で与えられている解である。（大小関係 $p\le q\le r$ より、これらは $1\le n\le m$ として $q=n$、$r=m$ としたものである。問題文に書かれた m と n の間の不等号は向きが逆になっているが、影響はない。$p=1$ は任意の q と r に対して成り立つからである。）そこで、$p\ge 2$ である解を探す。

先ほどと同様に $\frac{1}{p}$ が最大の項であるから

$$1<\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}\le\frac{3}{p}\quad\Longrightarrow\quad p<3.$$

$p\ge 2$ と合わせて $p=2$ を得る。このとき

$$\frac{1}{q}+\frac{1}{r}>\frac{1}{2}.$$

が成り立つ必要がある。

> **考えてみよう** q に対する評価で、なぜ今度は不等号が狭義（strict）になるのか。また、それは重要なのか。

$\frac{1}{r}\le\frac{1}{q}$ であるから、$\frac{1}{2}<\frac{1}{q}+\frac{1}{r}\le\frac{2}{q}$ となり、$q<4$ である。$q=4$ を除外するのは、まさにこの狭義の不等号である。（小問 (i) では $q=4$ が許され、等号成立の場合（equality case）$(2,4,4)$ を与えた。）$q\ge p=2$ と合わせて、$q=2$ または $q=3$ を得る。

▶ $q=2$：和は $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{r}=1+\frac{1}{r}>1$ となり、これは**すべての** r に対して成り立つ。よって $(2,2,r)$ は $r\ge 2$ であるすべての整数 r に対して解である。

▶ $q=3$：$\frac{1}{r}>\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ が必要であるから $r<6$ である。$r\ge q=3$ と合わせて $r=3,4,5$ を得る。

以上より、$p=1$ の族を除けば、解は

$$(p,q,r)=(2,2,r)\text{ 任意の整数}r\ge 2,\qquad (2,3,3),\quad (2,3,4),\quad (2,3,5).$$

である。上の各段階はすべて必然的に導かれたものであるから、これ以外の解は存在しない。

検算

直接代入してみる。たとえば $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=\frac{31}{30}>1$ であるが、$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$ はちょうど等しい。これにより、$(2,3,5)$ が $q=3$ の族の最後のものであり、$(2,3,6)$ が小問 (i) から来る境界の場合であることがわかる。同様に $(2,4,4)$ はちょうど 1 を与えるので、$p=2$、$q=4$ のものは小問 (ii) には一つも入らない。$1\le p\le q\le r<400$ のすべてについてコンピュータで探索すると、両方の解のリストがぴったり一致することが確かめられる。

よくある間違い

- 小問 (ii) で無限族 $(2,2,r)$ を見落とすこと。$p=q=2$ となった時点で、最初の 2 項だけで和はすでに 1 になっている。
- 小問 (ii) で $p<3$ の代わりに $p\le 3$ と書き、$p=3$ の場合（和は高々 1 にしかならない）に時間を浪費すること。
- すべての場合を調べ尽くしたことを示さずに、解のリストだけを述べること。「これ以外には存在しない」ことの証明が配点の半分を占める。

STEP のその先へ

$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}>1$ の解は、角が $\frac{\pi}{p},\frac{\pi}{q},\frac{\pi}{r}$ である三角形が球面上に存在するような 3 つ組とちょうど一致する。これらは 3 次元における有限対称性群（finite symmetry group）に対応している。すなわち、二面体群（dihedral）$(2,2,r)$、正四面体群（tetrahedral）$(2,3,3)$、正八面体群（octahedral）$(2,3,4)$、正二十面体群（icosahedral）$(2,3,5)$ である。小問 (i) は平らな平面の 3 種類の正則な平面充填（regular tiling）を与える。このように整数の範囲で解く方程式を、ディオファントス方程式（Diophantine equation）という。Davenport の *The Higher Arithmetic*（整数論の入門書）は良い入門書であり、Allenby の *Rings, Fields and Groups*（環・体・群の入門書）は対称性群を扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。