解答例

STEP I 1993、第 2 問

純粋数学 ・ 等比級数

> **STEP I 1993、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/93-s1-q2

鍵となる考え方

どちらの級数も、等比数列（geometric progression）からいくつかの項を取り除いたものである。$S_n(r)$ に現れる指数（exponent）は、3 の倍数**でない**数である。$T_n(r)$ に現れる指数は、偶数である数、**または** 3 の倍数である数である。そこで、それぞれの和を完全な等比数列の組合せとして書き表す。すなわち、等比数列全体をとって不要な項を引くか、二つの等比数列を足して二重に数えた項を引くのである。

解答

偶数乗の和

左辺は初項 1、公比（common ratio）r^2、項数 $n+1$ の等比数列である。これを E とおく。すると

$$E - r^2E = (1 + r^2 + \cdots + r^{2n}) - (r^2 + r^4 + \cdots + r^{2n+2}) = 1 - r^{2n+2},$$

となる。それ以外の項はすべて打ち消し合うからである。$|r| \neq 1$ ならば $r^2 \neq 1$ であるから、$1 - r^2$ で割ることができて

$$1 + r^2 + r^4 + \cdots + r^{2n} = \frac{1 - r^{2n+2}}{1 - r^2},$$

を得る。これが示すべき式である。（実数 r については、条件 $r^2 \neq 1$ はちょうど $|r| \neq 1$ と同値である。）

級数 $S_n(r)$

指数 $1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, \ldots, 3n-1$ は、1 から $3n-1$ までの整数のうち 3 の倍数でないものである。これらは $k = 0, 1, \ldots, n-1$ に対して $3k+1$, $3k+2$ という組になって現れる。よって

$$S_n(r) = \sum_{k=0}^{n-1} (r^{3k+1} + r^{3k+2}) = (r + r^2) \sum_{k=0}^{n-1} r^{3k}.$$

最後の和は公比 r^3、項数 n の等比数列である。実数 r について、$r \neq 1$ ならば $r^3 \neq 1$ であるから

$$S_n(r) = \frac{r(1+r)(1-r^{3n})}{1-r^3}.$$

同じことであるが、すべての累乗 $r, r^2, \ldots, r^{3n}$ をとり、そこから 3 の倍数乗を取り除いてもよい：

$$S_n(r) = \frac{r(1-r^{3n})}{1-r} - \frac{r^3(1-r^{3n})}{1-r^3}.$$

極限（limit）を求めるのに必要なのは、この二つ目の形である。

極限。 $|r| < 1$ ならば、$n \to \infty$ のとき $|r^{3n}| = |r|^{3n} \to 0$ である。したがって

$$S_n(r) \to \frac{r}{1-r} - \frac{r^3}{1-r^3}.$$

ここで $\dfrac{r}{1-r} = \dfrac{1}{1-r} - 1$ および $\dfrac{r^3}{1-r^3} = \dfrac{1}{1-r^3} - 1$ である。二つの -1 は打ち消し合い、

$$S_n(r) \to \frac{1}{1-r} - \frac{1}{1-r^3},$$

が残る。これが示すべき式である。

級数 $T_n(r)$

指数 $0, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, \ldots, 6n$ は、0 から $6n$ までの整数のうち、偶数であるか 3 で割り切れる（あるいはその両方である）ものである。

> **考えてみよう** 偶数乗の項と 3 の倍数乗の項を足し合わせると、どの項を二重に数えたことになるか？

指数が偶数であり、かつ 3 の倍数であるのは、ちょうどそれが 6 の倍数であるときである。そこで包除原理（inclusion–exclusion）を用いる。すなわち、偶数乗の項を足し、3 の倍数乗の項を足し、6 の倍数乗の項を引く。$6n$ までには次のものがある。

- 偶数乗 $r^0, r^2, \ldots, r^{6n}$。これは公比 r^2、項数 $3n+1$ の等比数列をなす。
- 3 の倍数乗 $r^0, r^3, \ldots, r^{6n}$。これは公比 r^3、項数 $2n+1$ の等比数列をなす。

- 6 の倍数乗 $r^0, r^6, \ldots, r^{6n}$。これは公比 r^6、項数 $n+1$ の等比数列をなす。

最初の結果で n を $3n$ に置き換えたものと、公比 r^3 および r^6 に対する同様の議論とを合わせると

$$\mathrm{T}_n(r) = \frac{1-r^{6n+2}}{1-r^2} + \frac{1-r^{6n+3}}{1-r^3} - \frac{1-r^{6n+6}}{1-r^6}.$$

$|r| \neq 1$ であるから、どの分母も 0 ではない。問題がここでは $|r| \neq 1$ を要求し、S_n に対しては $r \neq 1$ しか要求しないのはこのためである。$r = -1$ のとき $1-r^2$ と $1-r^6$ が 0 になってしまう。

極限。 $|r| < 1$ ならば、r^{6n+2}、r^{6n+3}、r^{6n+6} はいずれも 0 に収束する。よって

$$\mathrm{T}_n(r) \to \frac{1}{1-r^2} + \frac{1}{1-r^3} - \frac{1}{1-r^6}.$$

$1-r^6 = (1-r^2)(1+r^2+r^4) = (1-r^3)(1+r^3)$ を用いて共通分母 $1-r^6$ で通分すると、次のように整理される：

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{T}_n(r) = \frac{(1+r^2+r^4)+(1+r^3)-1}{1-r^6} = \frac{1+r^2+r^3+r^4}{1-r^6}.$$

$r > 1$、$r = 1$、$r = -1$ の場合

まず項の数を数える。連続する六つの指数 $6k, 6k+1, \ldots, 6k+5$ からなる各ブロックのうち、偶数であるか 3 で割り切れるものは $6k, 6k+2, 6k+3, 6k+4$ の四つである。ブロック $k = 0, \ldots, n-1$ は $6n-1$ までの指数を覆い、最後の項は r^{6n} である。よって $\mathrm{T}_n(r)$ の項数は $4n+1$ である。

- $r > 1$：どの項 r^e も $r^e \geq 1$ を満たすから $\mathrm{T}_n(r) \geq 4n+1$ であり、したがって $\mathrm{T}_n(r) \to \infty$ である。
- $r = 1$：どの項も 1 に等しいから、$\mathrm{T}_n(1) = 4n+1 \to \infty$ である。この場合は分母が 0 になるので、公式は使えない。
- $r = -1$：$(-1)^e$ は、偶数の e に対して $+1$、奇数の e に対して -1 である。各ブロックで指数 $6k, 6k+2, 6k+4$ は偶数、$6k+3$ は奇数であるから、各ブロックの寄与は $1+1-1+1 = 2$ である。よって

$$\mathrm{T}_n(-1) = 2n+1 \to \infty.$$

三つの場合のいずれにおいても、$\mathrm{T}_n(r)$ は $+\infty$ に発散（diverge）する。$r = -1$ の場合も発散することに注意しよう。奇数である 3 の倍数乗の項は、偶数乗の項を十分には打ち消さないのである。これを、単に振動（oscillate）するだけの $1-1+1-\cdots$ のような単純な交代級数と比べてみるとよい。

検算

- S_n の公式に $n = 1$ を代入すると $\frac{r(1+r)(1-r^3)}{1-r^3} = r + r^2$ となり、正しい。
- T_n の極限に $r = \frac{1}{2}$ を代入する。公式からは $\frac{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}}{1-\frac{1}{64}} = \frac{92}{63} \approx 1.4603$ が得られ、$T_n(\frac{1}{2})$ の項を直接数百項足し合わせても同じ値になる。
- $r \to 1^-$ のとき、T_n の極限は $\frac{4}{6(1-r)} = \frac{2}{3(1-r)}$ のように振る舞う。これは、累乗の六つのうち四つが現れていて、全体の級数 $\frac{1}{1-r}$ のおよそ 3 分の 2 になっていることと整合する。

よくある間違い

- 6 の倍数乗を引き忘れ、$1, r^6, r^{12}, \ldots$ を二重に数えてしまう。
- 各等比数列の項数を間違える。0 から $6n$ までの偶数の指数は $3n + 1$ 個であり、$3n$ 個ではない。
- 実際にブロック一つ分の項を足し合わせてみることなく、$T_n(-1)$ が交代級数のように振動すると思い込む。

STEP のその先へ

二つの集合の要素数を足して共通部分の要素数を引くことで和集合の要素を数える方法は、**包除原理**と呼ばれる。母関数（generating function）と組み合わせると、これは組合せ論や数論における標準的な道具となる。実際、ここで求めた極限は、6 と共通の約数をもつ非負整数の母関数である。同じ篩（ふるい）の考え方をすべての素数に適用すると、リーマン（Riemann）ゼータ関数に対するオイラー（Euler）の積公式が得られる。大学の解析学では、「$|r| < 1$ のとき $r^n \to 0$」という段階を厳密に扱い、無限級数をこのように並べ替えてよいのはどのような場合かを問う。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）はこの話題をよく扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。