解答例

STEP I 1993、第 16 問

確率・統計 ・ 幾何的確率

STEP I 1993、問 16

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/93-s1-q16

この問題は、*Beyond STEP* の第 12.20 節「**ビュフォンの針**」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch12/buffon.html

鍵となる考え方

これはビュフォン（Buffon）の針の問題である。ピンが最も近い直線と交わるかどうかは、ピンの先端がその直線**に向かって**どこまで届くかだけで決まり、その到達距離はピンの半分を直線に垂直な方向へ射影（projection）した長さである。まず中心の距離を固定し、角度だけから条件付き確率（conditional probability）を求め、それから距離について平均をとる。前半の積分はまさにこの平均操作から現れる積分であり、それゆえ問題はそこから始まっているのである。

解答

積分

$y = \cos^{-1} t$ とおくと、$t = \cos y$ かつ $\mathrm{d}t = -\sin y \,\mathrm{d}y$ である。$t = 0$ のとき $y = \frac{\pi}{2}$、$t = 1$ のとき $y = 0$ である。したがって

$$\int_0^1 \cos^{-1} t \,\mathrm{d}t = \int_{\pi/2}^0 y\,(-\sin y)\,\mathrm{d}y = \int_0^{\pi/2} y \sin y \,\mathrm{d}y.$$

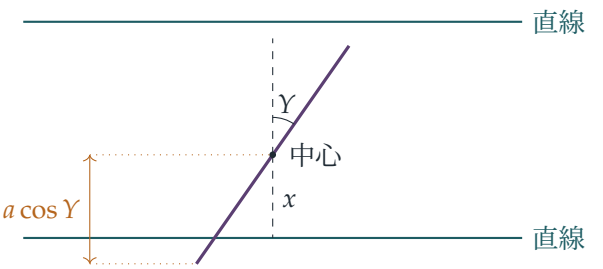
$u = y$、$\mathrm{d}v = \sin y\,\mathrm{d}y$ として部分積分（integration by parts）を行うと、

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} y\sin y\,\mathrm{d}y &= \Big[-y\cos y\Big]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2}\cos y\,\mathrm{d}y\\ &= 0 + \Big[\sin y\Big]_0^{\pi/2} = 1,\end{aligned}$$

となり、示すべき式が得られる。

（別解：この積分は $y = \cos^{-1} t$ と座標軸で囲まれた部分の面積であり、これは $0 \le y \le \frac{\pi}{2}$ における $t = \cos y$ の下側の面積と同じ領域である。すなわち $\int_0^{\pi/2}\cos y\,\mathrm{d}y = 1$ である。）

$X = x$ のもとでの確率



ピンの半分はそれぞれ長さ a をもち、直線に垂直な方向と角 Y をなすので、ピンの両端は中心の両側に垂直距離 $a\cos Y$ だけ離れたところにある。最も近い直線は中心から距離 x にあるので、ピンがそれと交わるのはちょうど

$$a\cos Y \;\ge\; x.$$

のときである。（等号の場合、すなわち先端がちょうど直線に触れる場合の確率は 0 なので、それを数えるかどうかは問題にならない。）

> **考えてみよう** $a\cos Y \ge x$ を Y だけの条件に書き直すにはどうすればよいか？

cos は $[0, \frac{\pi}{2}]$ で減少するので、x/a という値がとりうるものかどうかで場合が分かれる。

- $x \ge a$ ならば、$a\cos Y \le a \le x$ であり、等号が成り立つのは $Y = 0$ かつ $x = a$ のときに限られるので、確率は 0 である。
- $0 \le x < a$ ならば、$\cos Y \ge x/a$ は $Y \le \cos^{-1}(x/a)$ と同値であり、ここで $\cos^{-1}(x/a) \in (0, \frac{\pi}{2}]$ である。Y は $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上の一様分布（uniform distribution）に従うので、

$$\mathrm{P}(\text{交差する} \mid X = x) = \frac{\cos^{-1}(x/a)}{\pi/2} = \frac{2}{\pi}\cos^{-1}\frac{x}{a}.$$

ここでは X と Y の独立性（independence）を用いた。$X = x$ がわかっても、Y は $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上の一様分布のままである。

一般の投げ方に対する確率

次に $a < b$ とする。X の確率密度関数（probability density function）は $[0, b]$ 上で $1/b$ である。$a < b$ なので、交差が起こりうる区間 $[0, a)$ は $[0, b]$ に含まれ、$[a, b]$ 上では条件付き確率は 0 である。全確率の法則（law of total probability）により、

$$\mathrm{P}(\text{交差する}) = \int_0^b \mathrm{P}(\text{交差する} \mid X = x)\, \frac{1}{b}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{b} \int_0^a \frac{2}{\pi} \cos^{-1} \frac{x}{a}\, \mathrm{d}x.$$

$x = at$、$\mathrm{d}x = a\,\mathrm{d}t$ と置換し、前半の結果を用いると、

$$\mathrm{P}(\text{交差する}) = \frac{2a}{\pi b} \int_0^1 \cos^{-1} t\, \mathrm{d}t = \frac{2a}{\pi b},$$

となり、示すべき式が得られる。$a < b$ なのでピンは間隔 $2b$ より短く、2 本目の直線に届くことは決してない。したがって「いずれかの直線と交わる」ことと「最も近い直線と交わる」ことは同じ事象である。

検算

- $a \to b$ のとき答えは $2/\pi \approx 0.637$ に近づき、これは 1 より小さい。そうでなければならない。間隔と同じ長さのピンでも、直線とほぼ平行に横たわることはよくあるからである。
- 答えは a に比例する。短いピンの長さを 2 倍にすると交差の確率も 2 倍になり、これは交差の回数の期待値が長さについて線形であるという事実と合致する。
- 実際の幾何的状況（中心は帯の幅にわたって一様、角度も一様）を $a = 1$、$b = 2$ としてシミュレーションしたところ、4×10^5 回の投げで 0.3183 となり、$1/\pi \approx 0.31831$ と一致した。中点則による数値積分では $\int_0^1 \cos^{-1} t\, \mathrm{d}t = 1.0000000$ となった。

よくある間違い

- $a \cos Y$ の代わりに $a \sin Y$ を用いてしまう。ここで Y は直線そのものからではなく、直線に**垂直な方向**から測った角である。
- 条件付き確率を式 $\frac{2}{\pi} \cos^{-1}(x/a)$ のまま $[0, b]$ 全体で積分してしまう。この式は $x > a$ では定義されず、そこでの条件付き確率は 0 である。
- X について平均をとるときに密度 $1/b$ を忘れる。

STEP のその先へ

ビュフォンは 18 世紀にこの問題を提起した。これは**幾何学的確率**（geometric probability）の古典的な例であり、確率をパラメータ空間（ここでは長方形 $[0, b] \times [0, \frac{\pi}{2}]$）における面積として計算するものである。答えに π が含まれるので、ピンを投げることで π の（非常に収束の遅い）モンテカルロ法（Monte Carlo method）による推定値が得られる。美しい拡張である「ビュフォンのヌードル」（Buffon's noodle）は、期待値の線形性（linearity of expectation）により、どんな形の曲線であっても交差の回数の期待値はその長さだけで決まることを示す。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、連続的な同時分布やこの種の条件付けを扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。