解答例

# STEP I 1993、第 13 問

力学 ・ 仕事と仕事率

**STEP I 1993、問 13**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

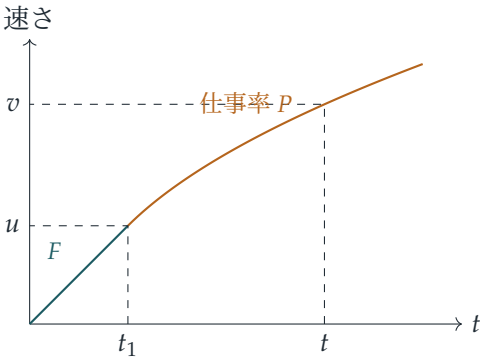
step.maths.org/questions/93-s1-q13

## 鍵となる考え方

運動は二つの段階からなり、それぞれの段階でニュートンの運動の第 2 法則（Newton's second law）を異なる形で用いる必要がある。力が一定である間は加速度も一定なので、*suvat* の公式（等加速度運動の公式）ですべて片づく。機関が一定の仕事率（power）で働くようになると、駆動力は $P/v$ となり、速さとともに変化する。ここでの工夫は、加速度を $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$（時間を求める場合）または $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$（距離を求める場合）と書き、変数を分離できるようにすることである。

## 解答

機関車と列車をまとめて、抵抗のない水平な直線軌道上を動く質量 $M$ の質点（particle）としてモデル化する。水平方向にはたらく力は牽引力（tractive force）だけである（重力と垂直抗力（normal reaction）は鉛直方向で、互いに打ち消し合う）。図は速さを時間に対して描いたものである。速さ $u$ までは直線で、その後は速さが増すにつれて傾きが小さくなる曲線となる。




**第 1 段階：一定の力**

一定の力 $F$ のもとでは加速度は $F/M$ である。静止状態から出発すると、速さが $u$ に達する時刻は

$$t_1 = \frac{Mu}{F} = \frac{Mu^2}{P},$$

である。ここで $F = P/u$ を用いた。$v^2 = u^2 + 2as$（ここでは 0 から $u$ まで）により、進む距離は

$$s_1 = \frac{u^2}{2F/M} = \frac{Mu^2}{2F} = \frac{Mu^3}{2P}.$$

**第 2 段階：一定の仕事率**

仕事率は力と速度の積なので、速さ $w$ のときの牽引力は $P/w$ である。$w = u$ のときこれは $P/u = F$ となるので、機関の動作が切り替わるときに力が不連続に変わることはない点に注意しよう。ニュートンの運動の第 2 法則より

$$M\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = \frac{P}{w}.$$

**時間**。 変数分離（separation of variables）により、$Mw\,\mathrm{d}w = P\,\mathrm{d}t$ である。時刻 $t_1$ における速さ $u$ から時刻 $t$ における速さ $v$ まで積分すると

$$\frac{M}{2}\left(v^2 - u^2\right) = P\,(t - t_1).$$

（これはまさに仕事とエネルギーの原理（work–energy principle）である。機関は仕事 $P(t - t_1)$ をし、それがすべて運動エネルギー（kinetic energy）になる。）よって

$$t = \frac{Mu^2}{P} + \frac{M}{2P}\left(v^2 - u^2\right) = \frac{M}{2P}\left(2u^2 + v^2 - u^2\right) = \frac{M}{2P}\left(u^2 + v^2\right),$$

となり、示すべき式が得られた。$v \geq u$ なので、速さ $v$ に達するのは第 2 段階においてである（またはちょうどその開始時点である）。このため第 2 段階の方程式を用いてよい。

**考えてみよう** 距離を求めるには、独立変数（independent variable）として $t$ ではなく $x$ が必要である。加速度はどのように書き直せばよいだろうか？

連鎖律（chain rule）により、$\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = w\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}$ である。したがって運動方程式（equation of motion）は

$$Mw\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} = \frac{P}{w}, \qquad \text{すなわち、} \qquad Mw^2\,\mathrm{d}w = P\,\mathrm{d}x.$$

となる。

**距離。** $w = u$ から $w = v$ まで積分すると、第 2 段階で進む距離 $s_2$ は

$$\frac{M}{3}\left(v^3 - u^3\right) = P s_2, \qquad s_2 = \frac{M}{3P}\left(v^3 - u^3\right).$$

を満たす。したがって全距離は

$$\begin{aligned} s_1 + s_2 &= \frac{Mu^3}{2P} + \frac{M}{3P}\left(v^3 - u^3\right) \\ &= \frac{M}{6P}\left(3u^3 + 2v^3 - 2u^3\right) \\ &= \frac{M}{6P}\left(2v^3 + u^3\right). \end{aligned}$$

**問題文の誤植。** 印刷された答えでは $u^3$ の代わりに $u^2$ となっている。これは正しいはずがない。$Mv^3/P$ は長さである（仕事率の単位は $\mathrm{kg\,m^2\,s^{-3}}$ で、$Mv^3$ の単位は $\mathrm{kg\,m^3\,s^{-3}}$ である）のに対し、$Mu^2/P$ は時間である。よって二つの項を足し合わせるためには、$u$ の項も 3 乗でなければならない。正しい距離は $\dfrac{M}{6P}\left(2v^3 + u^3\right)$ であり、これが上で示したものである。

## 検算

- $v = u$ とすると、時間の式は $Mu^2/P = Mu/F$、距離の式は $Mu^3/(2P) = Mu^2/(2F)$ を与え、当然そうなるべきとおり、第 1 段階の結果とちょうど一致する。
- 単位：$Mv^2/P$ はエネルギーを仕事率で割ったもので時間であり、$Mv^3/P$ は長さである。誤植はこのようにして見つかる。
- $M = F = u = 1$（よって $P = 1$）、$v = 2$ とすると、公式は $t = 2.5$ と距離 $17/6 \approx 2.833$ を与える。運動を数値的に刻んで計算する（速さ $u$ 未満では力 $F$、それ以上では $P/w$）と両方の値が再現され、ランダムな $M$、$F$、$u$ および $v \geq u$ に対しても公式と $10^{-7}$ より高い精度で一致する。印刷された $u^2$ の版は一致しない。

## よくある間違い

- 第 1 段階を忘れて、一定仕事率の方程式を静止状態から積分してしまう。第 2 段階の方程式は $w \geq u$ となって初めて成り立つ。$w = 0$ から始めると力が無限大になってしまう。
- $x$ について積分するときに $\mathrm{d}w/\mathrm{d}t$ を用いてしまう。距離を求めるには、加速度を $w\,\mathrm{d}w/\mathrm{d}x$ と書かなければならない。
- 第 1 段階の時間を $u/F$ と書いてしまう。加速度は $F$ ではなく $F/M$ である。

## STEP のその先へ

一定仕事率の段階は変数分離で解ける 1 階微分方程式（first-order differential equation）であり、独立変数を $t$ から $x$ に切り替える方法は、エネルギーを用いた解法全般で使われるのと同じ工夫である。$w\,\mathrm{d}w/\mathrm{d}x$ を積分すると運動エネルギーが得られ、これが仕事とエネルギーの定理へ、さらにはポテンシャル（potential）や保存量（conserved quantity）へとつながっていく。低速時に力に上限を設けることは、実際の牽引の仕組みでもある。一定の仕事率をもつモーターは、静止状態で無制限の力を出すことはできないからである。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、このような流れで仕事、エネルギー、仕事率を展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。