解答例

STEP I 1993、第 12 問

力学 ・ 放物体の迎撃

> **STEP I 1993、問 12**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/93-s1-q12

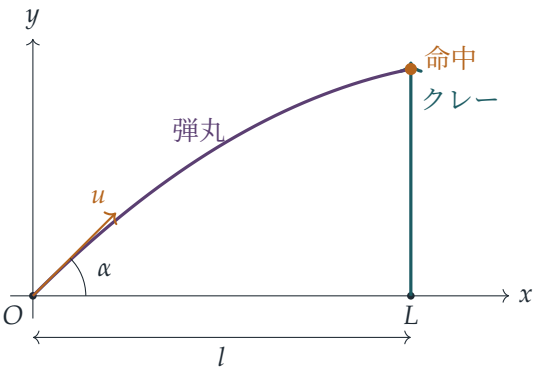
鍵となる考え方

命中するとは、弾丸とクレーが同じ瞬間に同じ位置にあるということである。弾丸が発射装置を通る鉛直線に到達する時刻は水平方向の運動だけで決まるので、まずその時刻を求め、次に二つの高さを一致させる。弾丸が飛んでいる間、重力は二つの物体をちょうど同じ量 $\frac{1}{2}gt^2$ だけ引き下げるので、この項は打ち消し合い、すっきりした一次の条件が残る。$T = 0$ のときには、この打ち消し合いによって問題全体を見通しよく読み解くことができる。

解答

モデル

クレーと弾丸を、空気抵抗なしに重力のみを受けて自由に運動する質点（particle）として扱い、競技者は発射装置を含む鉛直面内で、発射装置の方へ向けて撃つものと仮定する。競技者を原点 O に置き、x 軸を水平に、$x = l$ にある発射装置 L の方向へとり、y 軸を鉛直上向きにとる。時刻 t はライフルを撃った瞬間から測る。したがってクレーはすでに時間 T だけ空中にあり、時刻 t にはクレーが飛び始めてから $T + t$ だけ経過している。



命中の条件

発射から時刻 t における弾丸の位置は

$$x_B = (u\cos\alpha)\,t, \qquad y_B = (u\sin\alpha)\,t - \tfrac{1}{2}gt^2,$$

であり、時間 T だけ前に速さ v で真上に打ち出されたクレーは $x = l$ にあって、その高さは

$$y_C = v(T+t) - \tfrac{1}{2}g(T+t)^2 = \left(vT - \tfrac{1}{2}gT^2\right) + (v - gT)\,t - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

である。弾丸がクレーと出会えるのは直線 $x = l$ 上だけであり、弾丸がそこに到達するのは $(u\cos\alpha)\,t = l$ のとき、すなわち

$$t = \frac{l}{u\cos\alpha}.$$

のときである。（ここで $\cos\alpha > 0$ である。$l > 0$ なので、真上に向けたライフルの弾は発射装置に決して届かない。）命中するには、この瞬間に $y_B = y_C$ となる必要がある。$-\frac{1}{2}gt^2$ の項は打ち消し合うので

$$(u\sin\alpha)\,t = \left(vT - \tfrac{1}{2}gT^2\right) + (v - gT)\,t.$$

となる。$t = l/(u\cos\alpha)$ を代入すると

$$\frac{l\sin\alpha}{\cos\alpha} = \left(vT - \tfrac{1}{2}gT^2\right) + \frac{(v - gT)\,l}{u\cos\alpha},$$

が得られ、両辺に $\cos\alpha$ を掛けると

$$l\sin\alpha - \left(vT - \tfrac{1}{2}gT^2\right)\cos\alpha = \frac{v - gT}{u}\,l,$$

となる。これが求める結果である。

$T = 0$ の場合

$T = 0$ のとき条件は $l \sin\alpha = vl/u$ となり、$l > 0$ であるから

$$\sin\alpha = \frac{v}{u}.$$

考えてみよう なぜこれから $v \leq u$ だけでなく $v < u$ が導かれるのだろうか？

$\sin\alpha \leq 1$ が必要なので $v \leq u$ である。しかし $v = u$ ならば $\alpha = \frac{\pi}{2}$ となり、このとき $\cos\alpha = 0$ である。弾丸は O から真上に飛び、直線 $x = l$ には決して到達しない。したがって命中が可能なのは $v < u$ のときに限る。このとき

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{v^2}{u^2}} = \frac{\sqrt{u^2 - v^2}}{u},$$

である（$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ なので正の平方根をとる）。命中は時刻

$$t = \frac{l}{u\cos\alpha} = \frac{l}{\sqrt{u^2 - v^2}}.$$

に起こる。クレーが空中にあるのは $t = 0$ から再び $vt - \frac{1}{2}gt^2 = 0$ となるまで、すなわち $t = 2v/g$ までである。よって、クレーが落ちる前に命中させるには

$$\frac{l}{\sqrt{u^2 - v^2}} < \frac{2v}{g} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{2v\sqrt{u^2 - v^2}}{g} > l,$$

が必要である。ここで正の量 $\sqrt{u^2 - v^2}$ を両辺に掛けた。$v < u$ と合わせて、これが示すべきことであった。

$T = 0$ の場合には見通しのよい見方がある。$\sin\alpha = v/u$ のとき、弾丸の速度の鉛直成分は $u\sin\alpha = v$ であってクレーの速度と等しく、両者は同じ重力を受ける。したがって弾丸とクレーは**あらゆる瞬間に同じ高さにあり**、問題は、クレーが落ちてくる前に弾丸の水平方向の速さ $\sqrt{u^2 - v^2}$ で距離 l を進み切れるかどうかだけになる。

検算

- **重力のない極限。** $g = 0$ かつ $T = 0$ ならば、二つの物体はともに直線運動をし、条件 $\sin\alpha = v/u$ は、等速度で動く物体を迎撃するときのおなじみの「見越し射撃」の条件にほかならない。
- **最大到達距離。** u を固定すると、上界 $2v\sqrt{u^2 - v^2}/g$ は $v = u/\sqrt{2}$ のとき最大となり、その値は u^2/g、すなわち速さ u で投げ出された物体の最大到達距離に等しい。これは理にかなっている。$v = u/\sqrt{2}$ のとき $\alpha = 45°$ となり、命中はちょうど弾丸が地面に戻ってくる瞬間に起こるのである。

- **数値例。** $g = 9.8$、$v = 20$、$T = 0.7$、$u = 120$、$l = 60$（SI 単位）として命中する角度を数値的に求めると $\alpha \approx 0.2987$ rad となり、最初の恒等式の両辺は一致する。二つの運動を時間を追って進めると、弾丸が発射装置に到達したとき、弾丸とクレーはともに高さ 17.13 m にある。$T = 0$、$v = 20$、$u = 100$ のとき、上界は約 400 m で、$\alpha \approx 11.5^\circ$ である。

よくある間違い

- 遅れ T を考慮せずに、二つの物体に同じ時間変数を使ってしまう。クレーの高さには $T + t$ を用いなければならない。
- $v = u$ を除外し忘れる。このとき $\alpha = 90^\circ$ となり、まったく命中しない。
- 弾丸が発射装置に届くことだけを確かめ、その瞬間にクレーがまだ空中にあることを確かめない。

STEP のその先へ

$\frac{1}{2}gt^2$ の打ち消し合いは、ある深い考え方の特別な場合である。加速度 g で自由落下する座標系（frame）では重力が消え、あらゆる投射物は等速度で直線運動をする。これは加速度系に適用したガリレイの相対性原理（Galilean relativity）であり、アインシュタイン（Einstein）の手によって、一般相対性理論（general relativity）の核心にある等価原理（equivalence principle）となった。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、相対運動と非慣性系（non-inertial frame）を丁寧に展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。