解答例

STEP I 1993、第 11 問

力学 ・ 質量中心

> **STEP I 1993、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/93-s1-q11

鍵となる考え方

1 点から自由につり下げられた剛体（rigid body）にはたらく力は、支点が引く力と重力の 2 つだけである。2 つの力がつり合うのは、それらが同一直線上にはたらくときに限られる。したがって、重心（centre of mass）は支点の真下にこなければならない。結局のところ問題は、折り曲げた針金の重心 G を求めることと、2 つの位置の間で物体が直線 GA と GB のなす角だけ回転することに気づくことに帰着する。

解答

重心

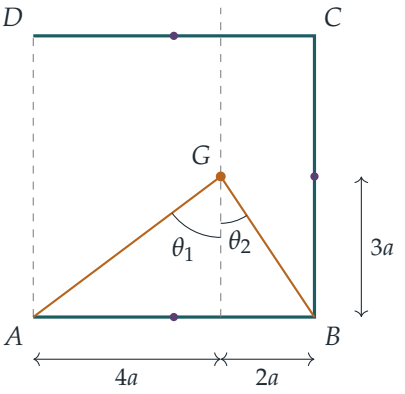
針金を、3 辺 AB、BC、CD の形に折り曲げた一様な剛体の棒とみなす。各辺の重さはいずれも W であり、なめらかな釘または軽い糸でつり下げるものとする。数値を整数に保つため、正方形の 1 辺の長さを $6a$ とし、針金を含む平面に座標軸を

$$A = (0,0), \quad B = (6a,0), \quad C = (6a,6a), \quad D = (0,6a).$$

となるようにとる。各辺は一様な棒であるから、その重力は中点にはたらく。すなわち AB では $(3a,0)$、BC では $(6a,3a)$、CD では $(3a,6a)$ である。3 つの重さは等しいので、G は 3 つの中点の平均である：

$$G = \left(\frac{3a + 6a + 3a}{3}, \frac{0 + 3a + 6a}{3} \right) = (4a,\ 3a).$$

（BC と AD の中点を通る直線に関する対称性から、G の高さは $3a$ でなければならない。計算が必要だったのは水平方向の位置だけである。）



図中の G を通る鉛直な破線は BC（および欠けている辺 AD）に平行である。GA がこの破線となす角を θ_1、反対側で GB がこの破線となす角を θ_2 とする。図から読み取ると、

$$\tan\theta_1 = \frac{4a}{3a} = \frac{4}{3}, \qquad \tan\theta_2 = \frac{2a}{3a} = \frac{2}{3}.$$

（実際 $AG = 5a$ であり、3–4–5 の三角形になっている。）

A からつり下げ、次に B からつり下げる

針金が A からつり下げられてつり合っているとき、針金にはたらく力は A における抗力と、G にはたらく全体の重さ $3W$ だけである。これらがつり合うためには、A のまわりのモーメント（moment）が打ち消し合わなければならないので、重力の作用線は A を通る。すなわち直線 AG は鉛直であり、G は A の下にある。BC は図の破線に平行であるから、このとき BC は鉛直方向に対して θ_1 だけ傾いている。

同様に、針金を B からつり下げると直線 BG が鉛直になり、BC は鉛直方向に対して、今度は逆向きに θ_2 だけ傾く。

? **考えてみよう** BC の 2 つの向きのなす角が $\theta_1 - \theta_2$ ではなく $\theta_1 + \theta_2$ になるのはなぜか？

第 1 の位置から第 2 の位置へ移るとき、針金は剛体として回転するので、針金の中のどの直線も同じ角だけ回転する。同じことだが、針金を紙面上に固定しておき、代わりに「下向き」のほうを回転させてもよい。第 1 の位置では下向きは GA の方向であり、第 2 の位置では GB の方向である。したがって回転角は、それらのなす角 AGB である。図において A と B は G を通る破線に関して反対側にあるので、

$$\angle AGB = \theta_1 + \theta_2.$$

加法定理（addition formula）を用いると、

$$\tan(\theta_1+\theta_2)=\frac{\tan\theta_1+\tan\theta_2}{1-\tan\theta_1\tan\theta_2}=\frac{\frac{4}{3}+\frac{2}{3}}{1-\frac{8}{9}}=\frac{2}{\frac{1}{9}}=18.$$

θ_1 と θ_2 はともに鋭角であるから $0<\theta_1+\theta_2<180^\circ$ であり、その正接が正なので、和は実際には鋭角である。よって、BC の 2 つの向きのなす角は $\tan^{-1}18$ であり、題意は示された。

検算

- 数値的には $\theta_1=\tan^{-1}\frac{4}{3}\approx 53.13^\circ$、$\theta_2=\tan^{-1}\frac{2}{3}\approx 33.69^\circ$ であり、和は 86.82° となる。また $\tan^{-1}18\approx 86.82^\circ$ でもある。
- 針金を 90 000 個の等しい小片で置き換え、それらの位置を平均して $G=(4a,3a)$ を得て、毎回 G が支点の下にくるように物体全体を回転させると、BC の 2 つの像のなす角は小数第 9 位まで同じ値になる。
- G の妥当性の確認：G は欠けている辺 AD よりも BC に近い。右側には針金がすべてあり、左側にはまったくないのだから、そうなるべきである。

よくある間違い

- G を正方形の中心 $(3a,3a)$ にとってしまう。4 辺すべてがあればそれで正しいが、欠けている辺 AD は何も左へ引き寄せない。
- 2 つの傾きを足さずに引いてしまう。BC は A からつり下げたときには一方に傾き、B からつり下げたときには反対側に傾くのである。

STEP のその先へ

「自由につり下げられた物体は、重心が支点の真下にくるようにぶら下がる」という原理は、扱いにくい形の平板の重心を実際に求める方法になっている。2 点からつり下げて、2 本の鉛直線（下げ振りの糸）がどこで交わるかを見ればよい。大学 1 年次の講義では、同じ考え方が位置エネルギー（potential energy）を通じて現れる。すなわち、つり合いの位置は G の高さの停留点（stationary point）であり、安定なつり合いの位置は最も低いものである。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、重心と剛体の静力学を、これと同様の多くの例とともに扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。