解答例

# STEP I 1993、第 10 問

力学 ・ ばねを含むつり合い

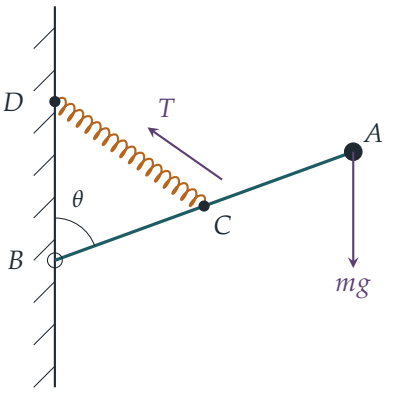
> **STEP I 1993、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/93-s1-q10

## 鍵となる考え方

蝶番（hinge）$B$ のまわりのモーメント（moment）をとる。そうすれば $B$ における未知の反力（reaction）は完全に消え、ばねの張力（tension）と棒の角度を結ぶ式が一つだけ残る。幾何は見た目ほど難しくない。$BD = BC = a$ であるから三角形 $BCD$ は二等辺三角形（isosceles triangle）であり、その中のすべての長さは $B$ における角の半分を用いて表せるからである。

## 解答

ランプを質点、棒を軽く剛体であるもの、$B$ の蝶番をなめらかなもの、ばねを軽くフックの法則（Hooke's law）に従うものとしてモデル化する。$\theta = \angle DBA$ とおく。これは棒と鉛直上向きの $BD$ とのなす角である。「壁から離れて」とは $0 < \theta < \pi$ を意味する。$\theta = 0$ または $\theta = \pi$ のとき、棒は壁に沿って横たわる。



### ばねの長さ

$BC = BD = a$ であり、そのなす角が $\theta$ であるから、三角形 $BCD$ は二等辺三角形である。$B$ から $CD$ に垂線を下ろすと、それは角 $\theta$ と辺 $CD$ をともに二等分するので、

$$CD = 2a\sin\tfrac{\theta}{2}, \qquad B \text{ から直線 } CD \text{ までの距離} = a\cos\tfrac{\theta}{2}.$$

フックの法則により、ばねの張力は

$$T = \frac{\lambda}{a}\left(2a\sin\tfrac{\theta}{2} - a\right) = \lambda\left(2\sin\tfrac{\theta}{2} - 1\right)$$

である。ここで $T$ が負であれば、ばねは圧縮されて押していることを意味する。

### $B$ のまわりのモーメント

棒とランプからなる系にはたらく力は、$A$ における重力 $mg$、$C$ において $CD$ に沿ってはたらくばねの力 $T$、そして $B$ における反力である。反力は $B$ のまわりのモーメントをもたない。重力は壁から水平距離 $2a\sin\theta$ の位置で鉛直にはたらき、棒を下向きに回転させる（$\theta$ を増加させる）。張力は $C$ を $D$ の方へ引き、棒を壁の方へ戻すように回転させる。釣り合い（equilibrium）のためには

$$T \cdot a\cos\tfrac{\theta}{2} = mg \cdot 2a\sin\theta = 4mga\sin\tfrac{\theta}{2}\cos\tfrac{\theta}{2}.$$

$0 < \theta < \pi$ のとき $\cos\frac{\theta}{2} > 0$ であるから、これで割ってよい：

$$T = 4mg\sin\tfrac{\theta}{2}.$$

特に $T > 0$ である。すなわち、ばねは伸びていなければならない。何かがランプを支えていなければならないのだから、これは理にかなっている。

**考えてみよう** これで $T$ について二つの式が得られた。それらを等しいとおくと何が得られるか。また、その答えが棒の実際の位置を表すためには、何が成り立たなければならないか。

$s = \sin\frac{\theta}{2}$ とおく。$T$ の二つの式を等しいとおくと

$$\lambda(2s-1) = 4mgs \quad\Longrightarrow\quad s(2\lambda - 4mg) = \lambda \quad\Longrightarrow\quad s = \frac{\lambda}{2(\lambda - 2mg)},$$

ただし $\lambda \neq 2mg$ とする（$\lambda = 2mg$ ならば方程式は $0 = \lambda$ となり、これは不可能である）。$0 < \theta < \pi$ であるから、実際の位置であるためには $0 < s < 1$ が必要である。

- $\lambda < 2mg$ ならば $s < 0$ となり、解は存在しない。
- $\lambda > 2mg$ ならば $s > 0$ であり、

$$s < 1 \iff \lambda < 2\lambda - 4mg \iff \lambda > 4mg.$$

したがって $\lambda > 4mg$ のとき、値 $s = \lambda/\big(2(\lambda - 2mg)\big)$ は 0 と 1 の間に厳密に含まれ、モーメントが釣り合う角 $\theta \in (0, \pi)$ がちょうど一つ得られる。（実際 $s > \frac{1}{2}$ であるから、ばねは確かに伸びている。）このとき合力（resultant force）は $B$ における反力が受け持つので、求められているとおり、ランプは壁から離れた位置で釣り合って吊り下がることができる。逆に、$\lambda \leq 4mg$ ならばそのような位置は存在しない。

その角は

$$\angle DBA = \theta = 2\arcsin\left(\frac{\lambda}{2(\lambda - 2mg)}\right),$$

であり、$\cos\theta = 1 - 2s^2$ であるから、同値な形で

$$\cos\angle DBA = 1 - \frac{\lambda^2}{2(\lambda - 2mg)^2}$$

と書ける。

## 検算

- $\lambda \to \infty$ のとき、ばねは伸びることができないので $CD \to a$ となり、三角形 $BCD$ は正三角形になる。公式からは $s \to \frac{1}{2}$ が得られるので、$\theta \to 60°$ である。✓
- 上から $\lambda \to 4mg$ とするとき、$s \to 1$ かつ $\theta \to 180°$ となる。ばねが弱すぎて、ランプは沈み込み、壁に沿って垂れ下がる。
- $\lambda = 6mg$ のとき：$s = \frac{3}{4}$、$\cos\theta = -\frac{1}{8}$ であるから、$\theta \approx 97.2°$ である。この角を（ばねの力を座標から計算した）完全なベクトルのモーメント方程式に代入すると、正味のモーメントは零になる。$0 < \theta < \pi$ の範囲で正味のモーメントを数値的に走査すると、$\lambda > 4mg$ のときはただ一つの根（たとえば $\lambda = 5mg$ のとき 112.9°）が見つかり、$\lambda \leq 4mg$ のときは根は見つからない。

## よくある間違い

- $B$ からばねの力の作用線までの距離として、$a$ ではなく棒全体の長さ $2a$ を用いてしまう。垂直距離は $a\cos\frac{\theta}{2}$ である。
- モーメントをとらずに力を分解してしまう。こうすると $B$ における反力の二つの未知成分が入り込むだけで、何も得をしない。
- $0 < \sin\frac{\theta}{2} < 1$ の確認を忘れる。条件 $\lambda > 4mg$ はまさにここから生じる。

## STEP のその先へ

この問題は、釣り合いが存在するかどうかだけを問うている。自然な次の問いは、それが**安定**（stable）かどうか、すなわち小さく突いたときにその揺れが減衰するか増大するか、である。これは位置エネルギー（potential energy）$V(\theta)$（重力によるものと弾性エネルギーの和）を書き下し、釣り合いの位置における $V''(\theta)$ の符号を調べることで答えられる。この考え方は大学 1 年の力学全体を貫き、のちには力学系（dynamical systems）の理論全体を貫いている。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、エネルギーによる方法と安定性を丁寧に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。