解答例

STEP I 1993、第 1 問

純粋数学 ・ さいころの目の和の数え上げ

> **STEP I 1993、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/93-s1-q1

この問題は、*Beyond STEP* の第 9.6 節「**奇妙なサイコロ**」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch09/strange-dice.html

鍵となる考え方

どの面もそれぞれ異なる色なので、ある合計を出す「出方」とは、各サイコロから面を 1 つずつ選ぶことにほかならない。一方のサイコロに k と書かれた面が a_k 個、他方に b_k 個あるとすると、合計 n を出す出方の数は

$$N(n) = \sum_{i+j=n} a_i\, b_j.$$

である。後半では、表を小さい合計から順に読んでいく。新しい合計ごとに、まだ現れていない未知数は 1 つか 2 つしか入ってこないので、面の個数は 1 つずつ決まっていく。途中で現れる少数の場合分けを排除するだけでよい。

解答

合計 6

1 つ目のサイコロでは、個数は $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 2, a_6 = 1$ である。2 つ目では $b_1 = 1$, $b_3 = 2, b_4 = 1, b_5 = 1, b_6 = 1$ である。合計 6 を出すには、1 つ目のサイコロが 1, 2, 3 のいずれかでなければならない。6 だと 2 つ目のサイコロに 0 が必要になるからである。よって

$$N(6) = a_1 b_5 + a_2 b_4 + a_3 b_3 = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 7,$$

となり、求める 7 通りが得られる。

新しい番号付けを求める

2 つのサイコロを P, Q とする。$k = 1, \ldots, 6$ に対し、P には k と書かれた面が a_k 個、Q には b_k 個あるとする。これらは非負整数で、

$$a_1 + \cdots + a_6 = b_1 + \cdots + b_6 = 6.$$

を満たす。（確認として、表の値を合計すると $36 = 6 \times 6$ になる。）

合計 2 と 3。 $N(2) = a_1 b_1 = 0$ なので、2 つのサイコロが両方とも 1 をもつことはない。しかし $N(3) = a_1 b_2 + a_2 b_1 = 2$ なので、どちらかのサイコロは 1 をもつ。そのサイコロを P とする。すると $a_1 \geq 1$ かつ $b_1 = 0$ であり、

$$N(3) = a_1 b_2 = 2, \qquad \text{よって} \qquad (a_1, b_2) = (2,1) \text{ または } (1,2).$$

$a_1 = 2, b_2 = 1$ の場合はありえない。 Q は 1 をもたないので $N(7) \geq a_1 b_6 = 2b_6$ であり、$N(7) = 3$ より $b_6 \leq 1$ である。この場合 Q には 2 と書かれた面が 1 つあり、3 や 4 をもたないことを確かめる。

- $N(4) = a_1 b_3 + a_2 b_2 = 2b_3 + a_2 = 1$ なので $2b_3 \leq 1$ であり、$b_3 = 0$、したがって $a_2 = 1$ となる。
- $N(5) = a_1 b_4 + a_2 b_3 + a_3 b_2 = 2b_4 + 0 + a_3 = 1$ なので、$b_4 = 0$ かつ $a_3 = 1$ である。

よって Q は 2 を 1 つもち、1, 3, 4 をもたず、残りの 5 面は 5 か 6 である。すなわち $b_5 + b_6 = 5$。$b_6 \leq 1$ なので $b_5 \geq 4$ となり、

$$N(6) \geq a_1 b_5 = 2b_5 \geq 8,$$

これは $N(6) = 4$ に矛盾する。したがってこの場合は起こりえない。

ゆえに $a_1 = 1$ かつ $b_2 = 2$。 $b_1 = 0$ であることに注意しながら、表を順に上っていく。

- $N(4) = a_1 b_3 + a_2 b_2 = b_3 + 2a_2 = 1$。$2a_2$ は偶数なので、$a_2 = 0$ かつ $b_3 = 1$ である。
- $N(5) = a_1 b_4 + a_2 b_3 + a_3 b_2 = b_4 + 0 + 2a_3 = 1$。同様に $a_3 = 0$ かつ $b_4 = 1$ である。
- $N(6) = a_1 b_5 + a_2 b_4 + a_3 b_3 + a_4 b_2 = b_5 + 2a_4 = 4$。

ここまでで Q の面は $b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 0 + 2 + 1 + 1 = 4$ 個が確定しているので、$b_5 + b_6 = 2$ である。$b_5 = 4 - 2a_4$ より b_5 は偶数なので、$b_5 = 0$ または $b_5 = 2$ である。

考えてみよう $b_5 = 0$ と $b_5 = 2$ のどちらであるかは、どうすれば決まるだろうか。

次の合計を用いる。P は 2 も 3 ももたず、Q は 1 をもたないので、

$$N(7) = a_1b_6 + a_4b_3 + a_5b_2 = b_6 + a_4 + 2a_5 = 3.$$

- $b_5 = 0$ ならば $a_4 = 2$ かつ $b_6 = 2$ である。すると $N(7) \geq b_6 + a_4 = 4 > 3$ となり、ありえない。
- $b_5 = 2$ ならば $a_4 = 1$ かつ $b_6 = 0$ である。すると $N(7) = 0 + 1 + 2a_5 = 3$ より $a_5 = 1$。P の面は $a_1 + a_4 + a_5 = 3$ 個が確定しているので、$a_6 = 3$ である。

表によってすべてが決定された。

$$P:\ 1,\ 4,\ 5,\ 6,\ 6,\ 6 \qquad\qquad Q:\ 2,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 5.$$

表の残りを確かめる。 用いたのは合計 2 から 7 だけなので、この番号付けで表の残りの値が得られることを確かめる必要がある。$a_1 = a_4 = a_5 = 1$, $a_6 = 3$ および $b_2 = 2$, $b_3 = b_4 = 1$, $b_5 = 2$ より、

$$\begin{aligned} N(8) &= a_4b_4 + a_5b_3 + a_6b_2 = 1 + 1 + 6 = 8, \\ N(9) &= a_4b_5 + a_5b_4 + a_6b_3 = 2 + 1 + 3 = 6, \\ N(10) &= a_5b_5 + a_6b_4 = 2 + 3 = 5, \\ N(11) &= a_6b_5 = 6, \\ N(12) &= a_6b_6 = 0. \end{aligned}$$

これらはすべて表と一致する。したがって、サイコロの番号付けは 1,4,5,6,6,6 と 2,2,3,4,5,5 でなければならず、この番号付けで実際に表が得られる。どちらのサイコロをどちらと呼ぶかの入れ替えを除けば、ありうる番号付けはこれだけである。

検算

- 1,4,5,6,6,6 と 2,2,3,4,5,5 の和を 6×6 の表に書き出し、各合計の個数を数えよ。0,2,1,1,4,3,8,6,5,6,0 となるはずである。
- 2 つのサイコロに 1 から 6 の番号を付けるすべての方法（サイコロ 1 個あたり 462 通りの多重集合がある）をコンピュータで探索すると、この組がただ 1 つ見つかり、ほかには見つからない。これにより解の一意性が確認できる。

よくある間違い

- 表に合う番号付けを推測して、そこで終えてしまう。問題は推論を求めているので、表から番号付けが一意に決まることを示す必要がある。
- $a_1 = 2, b_2 = 1$ の場合を忘れる、あるいは理由を示さずに退けてしまう。
- 小さい合計から面の個数を決めたあと、合計 8 から 12 を確かめない。

STEP のその先へ

$N(n)$ をうまくまとめる方法として、母関数（generating function）がある。$p(x) = \sum a_k x^k$, $q(x) = \sum b_k x^k$ とおくと、$p(x)q(x)$ における x^n の係数はちょうど $N(n)$ になる。つまりこの問題は、与えられた多項式を特定の形の 2 つの因子に因数分解せよ、と求めているのである。同じ考え方から**シッカーマンのサイコロ**（Sicherman dice）$1,2,2,3,3,4$ と $1,3,4,5,6,8$ が得られる。これは通常の 2 つのサイコロと同じ合計の分布をもつ。ハーバート・ウィルフ（Herbert Wilf）の *generatingfunctionology* は、この手法への生き生きとした入門書である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。