解答例

STEP III 1992、第 9 問

純粋数学 • 楕円の極方程式

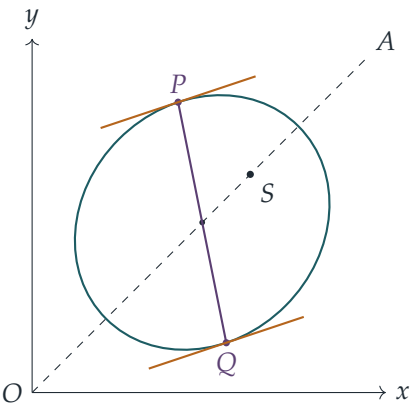
STEP III 1992、問 9

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/92-s3-q9

鍵となる考え方

極座標（polar coordinates）は S を極とし、始線（initial line）を $y = x$ の向きにとって測る。したがって偏角 θ の点は、S から見て直交座標（Cartesian coordinates）で $\theta + \frac{\pi}{4}$ の方向にある。x と y を θ の関数として表し、微分すれば傾き（gradient）が得られる。後半で実際に使える直径（diameter）の性質は、楕円（ellipse）がその中心に関して対称であることである。すなわち、直径の両端における接線（tangent）は平行になる。そこで二つの傾きを等しいとおき、あとは半角の三角関数に任せればよい。



図（$e = \frac{1}{2}$）において、PQ は中心を通る直径であり、P と Q における接線は平行である。

解答

接線の傾き

S は第 1 象限で直線 $y = x$ 上にあるから、S を点 (s,s)（$s > 0$）とする。SA 方向の単位ベクトルは $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$ であり、x 軸となす角は $\frac{\pi}{4}$ である。よって S を極とする極座標が (r,θ) である点は

$$x = s + r\cos\phi, \qquad y = s + r\sin\phi, \qquad \text{ただし} \phi = \theta + \tfrac{\pi}{4}.$$

E 上では $r = \ell/(1 + e\cos\theta)$ であるから

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\ell e\sin\theta}{(1+e\cos\theta)^2} = \frac{r\,e\sin\theta}{1+e\cos\theta}.$$

$\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta$ を r' と書き、$\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}\theta = 1$ を用いると

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = r'\cos\phi - r\sin\phi, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} = r'\sin\phi + r\cos\phi.$$

必要なのは比だけなので、両方に正の量 $(1+e\cos\theta)/r$ を掛ける：

$$\frac{1+e\cos\theta}{r}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = e\sin\theta\cos\phi - (1+e\cos\theta)\sin\phi = e\sin(\theta-\phi) - \sin\phi = -\tfrac{e}{\sqrt{2}} - \sin\phi,$$
$$\frac{1+e\cos\theta}{r}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} = e\sin\theta\sin\phi + (1+e\cos\theta)\cos\phi = e\cos(\theta-\phi) + \cos\phi = \tfrac{e}{\sqrt{2}} + \cos\phi,$$

ここで $\theta - \phi = -\frac{\pi}{4}$ を用いた。さらに $\sin\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin\theta+\cos\theta)$、$\cos\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\theta-\sin\theta)$ である。全体に $\sqrt{2}$ を掛けると、$\theta = \alpha$ における接ベクトル（tangent vector）は

$$\mathbf{d}(\alpha) = (-(\sin\alpha + \cos\alpha + e),\ \cos\alpha - \sin\alpha + e). \qquad (*)$$

したがって

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\cos\alpha - \sin\alpha + e}{-(\sin\alpha+\cos\alpha+e)} = \frac{\sin\alpha - \cos\alpha - e}{\sin\alpha + \cos\alpha + e},$$

となり、示すべき式が得られた。（$\sin\alpha + \cos\alpha + e = 0$ となるところでは接線は鉛直であるが、そこでも $(*)$ は成り立つ。）

直径の両端

考えてみよう 中心をまだ求めていないのに、「PQ が中心を通る」という条件をどうすれば α と β の方程式に直せるだろうか。

前半の結果を使う。楕円はその中心 C のまわりの半回転（half-turn）、すなわち点対称移動に関して対称である。P と Q が直径の両端であれば、この半回転は二点を入れ替え、P における接線を Q における接線に移す。半回転はどの直線も平行な直線に移すから、P と Q における接線は平行である。

そこで P で $\theta=\alpha$、Q で $\theta=\beta$ とすると、$(*)$ のベクトル $\mathbf{d}(\alpha)$ と $\mathbf{d}(\beta)$ は平行である。傾きではなくベクトルで扱うので、接線が鉛直な場合でも 0 で割ることはない。$s_\alpha=\sin\alpha$、$c_\alpha=\cos\alpha$ などと書く。条件は

$$(s_\alpha+c_\alpha+e)(c_\beta-s_\beta+e)=(s_\beta+c_\beta+e)(c_\alpha-s_\alpha+e).$$

展開すると、$c_\alpha c_\beta$、$-s_\alpha s_\beta$、ec_α、ec_β、e^2 の項は両辺に現れて打ち消し合い、

$$s_\alpha c_\beta-c_\alpha s_\beta+es_\alpha-es_\beta=s_\beta c_\alpha-c_\beta s_\alpha+es_\beta-es_\alpha,$$

が残る。すなわち

$$\sin(\alpha-\beta)+e(\sin\alpha-\sin\beta)=0.$$

ここで $\sin(\alpha-\beta)=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ と $\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$ を用いると

$$2\sin\tfrac{\alpha-\beta}{2}\left(\cos\tfrac{\alpha-\beta}{2}+e\cos\tfrac{\alpha+\beta}{2}\right)=0.$$

考えてみよう $\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$ で割ってよいだろうか。

よい。P と Q は異なる点であるから、α と β の差は 2π の整数倍ではなく、$\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\neq0$ である。したがって

$$\cos\tfrac{\alpha-\beta}{2}+e\cos\tfrac{\alpha+\beta}{2}=0.$$

$\frac{\alpha}{2}$ と $\frac{\beta}{2}$ を用いて展開すると

$$(1+e)\cos\tfrac{\alpha}{2}\cos\tfrac{\beta}{2}+(1-e)\sin\tfrac{\alpha}{2}\sin\tfrac{\beta}{2}=0.$$

$(1-e)\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}$ で割ると（E は楕円なので $1-e>0$ である）

$$\tan\tfrac{\alpha}{2}\tan\tfrac{\beta}{2}=-\frac{1+e}{1-e},$$

となり、示すべき式が得られた。この割り算は $\cos\frac{\alpha}{2}$ または $\cos\frac{\beta}{2}$ が 0 でない限り正当である。たとえば $\alpha=\pi$ ならば、方程式から $\sin\frac{\beta}{2}=0$、よって $\beta=0$ となる。この直径は OSA に沿った長軸（major axis）であり、そこでは tan の積は定義されない。それ以外のすべての直径はこの結果を満たす。

検算

- $\alpha=0$（S に近い方の頂点）では、公式から傾きは $\frac{-1-e}{1+e}=-1$ となる。これは正しい。長軸の端における接線は $y=x$ に垂直だからである。
- $e=\frac{1}{2}$ のとき、積は -3 になるはずである。$\alpha=\frac{\pi}{2}$ とすると $\tan\frac{\alpha}{2}=1$ である。すると $\tan\frac{\beta}{2}=-3$ であり、$\sin\beta=-\frac{3}{5}$、$\cos\beta=-\frac{4}{5}$ となる。$(*)$ より $\mathbf{d}(\alpha)=(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2})$、$\mathbf{d}(\beta)=(\frac{9}{10},\frac{3}{10})$ であり、これらは平行である。✓

- 数値的にも、ℓ、e、S、α を無作為に 2000 通り選んで調べたところ、傾きの公式は有限差分（finite difference）による導関数と一致した。また P を中心（S から AS に沿って距離 $\ell e/(1-e^2)$ の位置）に関して対称移動すると E 上の点 Q が得られ、その β は 10^{-13} の精度で恒等式を満たした。

よくある間違い

- $\frac{\pi}{4}$ の回転を忘れて $x = r\cos\theta$ を用いてしまい、誤った座標系での傾きを求めてしまう。
- $\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$ が 0 でない理由を述べずにそれで割ってしまう。
- 中心を求めて「C は PQ の中点である」という条件を直接課そうとする。これでも解けるが、平行な接線を使うよりはるかに煩雑になる。

STEP のその先へ

直径の両端における接線が平行であることは、**共役直径**（conjugate diameters）の理論の一部である。平行な弦の族の中点は一本の直径上にあり、その直径の両端における接線はそれらの弦に平行である。楕円を円に変換するアフィン写像（affine map）のもとでは、これらはすべて初等的な円の幾何学になる。これはアフィン幾何学や射影幾何学（projective geometry）が非常に強力である理由の一つである。また、ここで現れた半角の tan は、天体力学（celestial mechanics）で軌道に用いられる標準的な媒介変数表示（parametrisation）でもある。この幾何学への大学 1 年生向けのよい入門としては、Needham の *Visual Complex Analysis*（視覚的な複素解析入門）や Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（STEP 対策の定番問題集）を読んでみるとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。