解答例

STEP III 1992、第 8 問

純粋数学 ・ 解を用いた三角関数の和

> **STEP III 1992、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/92-s3-q8

鍵となる考え方

ド・モアブル（de Moivre）の定理を用いると、$\sin(2n+1)\theta$ は $\cos\theta$ と $\sin\theta$ の多項式（polynomial）に変形でき、$\sin^{2n+1}\theta$ でくくり出すと $\cot^2\theta$ の多項式が残る。角 $k\pi/(2n+1)$ では左辺が 0 になるので、それらの余接の 2 乗は既知の多項式の根（root）である。根がすべてわかってしまえば、三つの和は姿を変えた解と係数の関係（Vieta's formulas）（根の和と根の逆数の和）にすぎない。

解答

恒等式

$c=\cos\theta$、$s=\sin\theta$、$N=2n+1$ とおく。ド・モアブルの定理と二項定理（binomial theorem）により、

$$\cos N\theta+\mathrm{i}\sin N\theta=(c+\mathrm{i}s)^N=\sum_{j=0}^{N}\binom{N}{j}c^{N-j}(\mathrm{i}s)^j.$$

虚数の項は j が奇数の項である。$j=2m+1$ とおくと $\mathrm{i}^{2m+1}=\mathrm{i}(-1)^m$ であるから、

$$\sin N\theta=\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\binom{2n+1}{2m+1}c^{2n-2m}s^{2m+1}.$$

ここで $r = n - m$ として和の順序を逆にする。このとき $2m+1 = 2n+1-2r$ であり、二項係数の対称性から $\binom{2n+1}{2n+1-2r} = \binom{2n+1}{2r}$ である。よって

$$\begin{aligned}\sin(2n+1)\theta &= \sum_{r=0}^{n}(-1)^{n-r}\binom{2n+1}{2r}c^{2r}s^{2n+1-2r}\\ &= \sin^{2n+1}\theta\sum_{r=0}^{n}(-1)^{n-r}\binom{2n+1}{2r}\cot^{2r}\theta,\end{aligned}$$

となる。ここで s^{2n+1} をくくり出し、$c^{2r}/s^{2r} = \cot^{2r}\theta$ を用いた。これは $\sin\theta \neq 0$ であるかぎり成り立ち、示すべきことが示された。

多項式の根

$$p(x) = \sum_{r=0}^{n}(-1)^{r}\binom{2n+1}{2r}x^{r},$$

とし、$k = 1,\dots,n$ に対して $\theta_k = k\pi/(2n+1)$ とおく。すると $(2n+1)\theta_k = k\pi$ より $\sin(2n+1)\theta_k = 0$ であり、一方 $0 < \theta_k < \pi/2$ より $\sin\theta_k \neq 0$ である。恒等式を $\sin^{2n+1}\theta_k$ で割り、$(-1)^n$ を掛けると、

$$\sum_{r=0}^{n}(-1)^{r}\binom{2n+1}{2r}\cot^{2r}\theta_k = 0, \qquad \text{すなわち} \qquad p(\cot^2\theta_k) = 0.$$

考えてみよう これらが根のすべてであることは、どうしてわかるのか。以下の和はこの事実に依存している。

角 $\theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_n$ はすべて $(0,\pi/2)$ にあり、そこでは cot は正で狭義単調減少である。よって n 個の数 $\cot^2\theta_k$ は互いに異なる。p の最高次の係数は $(-1)^n\binom{2n+1}{2n} = (-1)^n(2n+1) \neq 0$ であるから、p の次数はちょうど n であり、根は高々 n 個である。したがって $p(x) = 0$ の根はちょうど $k = 1,\dots,n$ に対する $\cot^2\theta_k$ であり、いずれも単根である。

必要な係数は次のとおりである。

$$\begin{aligned}[x^n]:\ (-1)^n\binom{2n+1}{2n} &= (-1)^n(2n+1),\\ [x^{n-1}]:\ (-1)^{n-1}\binom{2n+1}{2n-2} &= (-1)^{n-1}\binom{2n+1}{3},\\ [x^1]:\ -\binom{2n+1}{2} &= -n(2n+1), \qquad [x^0]:\ 1.\end{aligned}$$

小問 (i)

根の和は、x^{n-1} の係数と x^n の係数の比にマイナスをつけたものである。

$$\sum_{k=1}^{n} \cot^2\theta_k = -\frac{(-1)^{n-1}\binom{2n+1}{3}}{(-1)^n(2n+1)} = \frac{1}{2n+1}\cdot\frac{(2n+1)(2n)(2n-1)}{6} = \frac{n(2n-1)}{3}.$$

小問 (ii)

$\tan^2\theta_k = 1/\cot^2\theta_k$ であるから、求めたいのは根 x_k の逆数の和である。どの根も 0 ではなく（定数項が 1 である）、

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} = \frac{\sum_k \prod_{j\neq k} x_j}{\prod_k x_k},$$

の分子と分母は､解と係数の関係によりそれぞれ $(-1)^{n-1}\cdot[x^1]/[x^n]$ と $(-1)^n\cdot[x^0]/[x^n]$ である。その比は $-[x^1]/[x^0]$ であるから、

$$\sum_{k=1}^{n} \tan^2\theta_k = -\frac{-n(2n+1)}{1} = n(2n+1).$$

（同値な見方として、逆数 $1/x_k$ は係数の並びを逆にした多項式 $x^n p(1/x)$ の根であり、その根の和を読み取ればよい。）

小問 (iii)

$\operatorname{cosec}^2\theta = 1+\cot^2\theta$ と小問 (i) を用いると、

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{cosec}^2\theta_k = n + \frac{n(2n-1)}{3} = \frac{3n+2n^2-n}{3} = \frac{2n(n+1)}{3}.$$

検算

$n=1$ のとき多項式は $1-3x$ であり、その根は $\frac{1}{3} = \cot^2(\pi/3)$ である。このとき (i) は $\frac{1}{3}$、(ii) は $3 = \tan^2(\pi/3)$、(iii) は $\frac{4}{3} = \operatorname{cosec}^2(\pi/3)$ を与え、いずれも正しい。$n=3$ のとき角は $\pi/7, 2\pi/7, 3\pi/7$ であり、電卓で計算すると三つの和は 5、21、8 となって、$\frac{3\cdot5}{3}$、$3\cdot7$、$\frac{2\cdot3\cdot4}{3}$ と一致する。また、無作為に選んだ θ と n で恒等式を、$n\le 29$ で三つの和をすべて数値的に確かめた。

よくある間違い

- $\cot^2\theta_k$ が互いに異なることと、p の次数がちょうど n であることを論じ忘れる。これがなければ、$\cot^2\theta_k$ に解と係数の関係を適用することはできない。

- 係数の符号の誤り。小問 (i) では因子 $(-1)^n$ が打ち消し合うが、それは両方の係数がこの因子をもつ場合に限られる。
- k を $2n$ まで動かしてしまう。$k > n$ に対する角 $k\pi/(2n+1)$ は同じ $\cot^2$ の値を繰り返すだけなので、互いに異なる根を与えるのは $k \leq n$ のみである。

STEP のその先へ

小問 (iii) の結果と、$0 < \theta < \pi/2$ で成り立つ $\cot^2\theta < 1/\theta^2 < \operatorname{cosec}^2\theta$ を組み合わせると、$\sum_{k=1}^{n} 1/k^2$ をここで求めた和の定数倍二つで挟み込むことができる。$n \to \infty$ とすると、オイラー（Euler）の有名な結果 $\sum 1/k^2 = \pi^2/6$ が得られる。これは大学 1 年の解析学の講義でもよく紹介される、美しい初等的証明である。多項式の係数から和を読み取るという同じ発想は、対称関数（symmetric functions）やニュートンの恒等式（Newton's identities）の根底にもある。解析学の側面については Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門）を、この趣向の問題をさらに解きたければ Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*（発展的な数学の問題集）を参照するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。