解答例

STEP III 1992、第 7 問

純粋数学 ・ ベクトルと図形

> **STEP III 1992、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/92-s3-q7

鍵となる考え方

この問題に現れるものはすべて、平行四辺形（parallelogram）と、辺を与えられた比に分ける点からできている。これはまさに位置ベクトル（position vector）が得意とする状況である。原点を A にとり、すべての点を 2 つの辺ベクトル $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AD}$ で表す。そのうえで 2 本の直線の交点を求め、その点が 3 本目の直線上にあることを確かめればよい。

解答

A を原点とし、$\mathbf{b} = \overrightarrow{AB}$、$\mathbf{d} = \overrightarrow{AD}$ とおく。$ABCD$ はつぶれていない本物の平行四辺形であるから、これらは平行でない。したがって平面上のすべての点は、ただ 1 組の実数の組 (λ, μ) によって $\lambda\mathbf{b} + \mu\mathbf{d}$ と表され、係数比較（comparing coefficients）ができる。

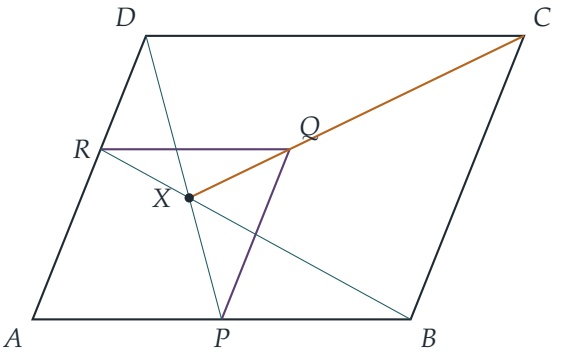
$ABCD$ は平行四辺形であるから、C の位置ベクトルは $\mathbf{b} + \mathbf{d}$ である。P は辺 AB 上、R は辺 AD 上にあるから、

$$\mathbf{p} = p\,\mathbf{b}, \qquad \mathbf{r} = r\,\mathbf{d}, \qquad 0 \le p, r \le 1.$$

と書ける。$APQR$ は平行四辺形であるから $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AR}$ であり、

$$\mathbf{q} = p\,\mathbf{b} + r\,\mathbf{d}.$$

となる。



BR と DP の交点

直線 BR 上の一般の点は

$$\mathbf{b} + s(r\mathbf{d} - \mathbf{b}) = (1-s)\,\mathbf{b} + sr\,\mathbf{d},$$

であり、直線 DP 上の一般の点は

$$\mathbf{d} + t(p\mathbf{b} - \mathbf{d}) = tp\,\mathbf{b} + (1-t)\,\mathbf{d}.$$

である。共有点では $\mathbf{b}$ の係数どうし、$\mathbf{d}$ の係数どうしが一致しなければならない：

$$1 - s = tp, \qquad sr = 1 - t.$$

$s = 1 - tp$ を第 2 式に代入すると $r - rpt = 1 - t$ となり、$t(1-pr) = 1 - r$ を得る。

考えてみよう $1 - pr$ で割ってよいだろうか？

$0 \le p, r \le 1$ であるから、$pr = 1$ となるのは $p = r = 1$、すなわち $P = B$ かつ $R = D$ のときに限る。このとき $Q = C$ となり、「直線」CQ は定まらないので、証明すべきことは何もない。そこでこの場合を除外すると、$1 - pr > 0$ となる。これにより BR と DP は平行でないこともわかり、両者はちょうど 1 点で交わる。よって

$$t = \frac{1-r}{1-pr}, \qquad s = 1 - tp = \frac{1 - pr - p + pr}{1-pr} = \frac{1-p}{1-pr},$$

であり、交点 X は

$$\mathbf{x} = tp\,\mathbf{b} + sr\,\mathbf{d} = \frac{p(1-r)\,\mathbf{b} + r(1-p)\,\mathbf{d}}{1-pr}.$$

である。

X は CQ 上にある

直線 CQ 上の一般の点は

$$\mathbf{c} + u(\mathbf{q} - \mathbf{c}) = (\mathbf{b} + \mathbf{d}) + u((p-1)\mathbf{b} + (r-1)\mathbf{d}) = (1 - u(1-p))\mathbf{b} + (1 - u(1-r))\mathbf{d}.$$

である。$u = \dfrac{1}{1-pr}$ とおいてみる。$\mathbf{b}$ の係数は

$$1 - \frac{1-p}{1-pr} = \frac{1-pr-1+p}{1-pr} = \frac{p(1-r)}{1-pr},$$

となり、$\mathbf{d}$ の係数は

$$1 - \frac{1-r}{1-pr} = \frac{1-pr-1+r}{1-pr} = \frac{r(1-p)}{1-pr}.$$

となる。これらはちょうど $\mathbf{x}$ の係数に一致する。したがって X は CQ 上にもあり、3 本の直線 BR、CQ、DP はすべて X を通る。すなわち 3 直線は 1 点で交わる（concurrent）。以上で示された。 ■

（対称性からも安心できる。B, P, p と D, R, r の役割を入れ替えると、BR と DP が入れ替わり、CQ はそのままで、$\mathbf{x}$ の式も変わらない。）

検算

- $P = A$（$p = 0$）ならば $Q = R$ であり、$\mathbf{x} = r\mathbf{d}$、すなわち R となる。実際、DP は直線 DA であって BR と R で交わり、CQ は CR であって R を通る。
- P、R がそれぞれ AB、AD の中点ならば $\mathbf{x} = \frac{1}{3}(\mathbf{b} + \mathbf{d})$ であり、これは A から C へ向かって 3 分の 1 の位置にある点である。BR と DP は三角形 ABD の中線（median）のうちの 2 本であるから、この点が三角形 ABD の重心（centroid）になるのは当然である。
- ランダムに選んだ 5000 個の平行四辺形と、ランダムな P、R の位置について、分数を用いた厳密計算で 3 直線が 1 点で交わることを確認した。すべての場合で $\mathbf{x}$ の式と一致した。

よくある間違い

- 2 つの係数を比較できるのは $\mathbf{b}$ と $\mathbf{d}$ が平行でないからである、ということを忘れる。
- 異なる 2 本の直線に同じ媒介変数（parameter）を使ってしまう。直線ごとに別々の媒介変数（s、t、u）が必要である。
- $P = B$、$R = D$ という退化した場合（degenerate case）に触れない。この場合 $Q = C$ となり、直線 CQ は定まらない。

STEP のその先へ

この解答では長さや角度を一切使わず、平行線と直線上の比だけを用いていることに注目しよう。したがってこの結果は**アフィン幾何学**（affine geometry）に属する。アフィン写像（affine map、線形写像（linear map）に平行移動（translation）を合成したもの）は、3 直線が 1 点で交わるという性質を保ったまま任意の平行四辺形を正方形に移すので、正方形の場合に結果を示せば十分である。直線が交わることに関する問題は、射影幾何学（projective geometry）においても自然なものであり、チェバ（Ceva）の定理やデザルグ（Desargues）の定理といった定理はこの分野に属する。これらの考え方を幅広く、読みやすく概観するには、コクセター（Coxeter）の *Introduction to Geometry*（幾何学入門）や、Brannan、Esplen、Gray の *Geometry*（幾何学）を読んでみるとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。