解答例

STEP III 1992、第 6 問

純粋数学 ・ 三角関数の漸化式（積分）

> **STEP III 1992、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/92-s3-q6

鍵となる考え方

どちらの漸化式（reduction formula）も、三角関数の差を因数 $\sin x$ を含む積に変形し、その因数で厄介な分母を約分するという発想に基づいている。I_n に対して用いる道具は $\sin^2 A - \sin^2 B = \sin(A+B)\sin(A-B)$ であり、J_n に対しては $\sin P - \sin Q$ の和積公式（sum-to-product formula）である。分母が消えてしまえば、残るのは初等的な積分であり、二つの漸化式は順に打ち消し合う和（telescoping sum）となる。

解答

まず被積分関数について一言述べておく。どの被積分関数も分母に $\sin x$ をもち、これは $x = 0$ と $x = \pi$ で 0 になるが、これらの特異点は除去可能（removable）である。実際、$x \to 0$ のとき $\sin(nx)/\sin x \to n$、$x \to \pi$ のとき $\sin(nx)/\sin x \to \pm n$ であるから、どちらの被積分関数も有界（bounded）である。したがって、以下の積分はすべて連続関数の通常の積分である。

関係式 $I_n - I_{n-1} = J_n$

$\sin^2 A - \sin^2 B = (\sin A - \sin B)(\sin A + \sin B)$ と和積公式を用いると、

$$\sin^2 A - \sin^2 B = (2\cos\tfrac{A+B}{2}\sin\tfrac{A-B}{2})(2\sin\tfrac{A+B}{2}\cos\tfrac{A-B}{2}) = \sin(A+B)\sin(A-B).$$

$A = nx$、$B = (n-1)x$ とおくと、

$$\sin^2(nx) - \sin^2((n-1)x) = \sin((2n-1)x)\sin x.$$

したがって、$n \geq 1$ に対して

$$I_n - I_{n-1} = \int_0^\pi \frac{x[\sin^2(nx) - \sin^2((n-1)x)]}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \frac{x\sin(2n-1)x}{\sin x}\,\mathrm{d}x = J_n,$$

となり、示すべき式が得られた。（$n = 1$ のときは、I_0 を $x\sin^2 0/\sin^2 x = 0$ の積分と解釈するので、$I_0 = 0$ である。）

J_n の漸化式

次に J_{n+1} と J_n を比べる。和積公式 $\sin P - \sin Q = 2\cos\frac{P+Q}{2}\sin\frac{P-Q}{2}$ により、

$$\sin(2n+1)x - \sin(2n-1)x = 2\cos(2nx)\sin x,$$

であるから、ここでも $\sin x$ が約分される：

$$J_{n+1} - J_n = 2\int_0^\pi x\cos(2nx)\,\mathrm{d}x.$$

$u = x$、$\mathrm{d}v = \cos(2nx)\,\mathrm{d}x$ として部分積分（integration by parts）を行うと、

$$\begin{aligned}\int_0^\pi x\cos(2nx)\,\mathrm{d}x &= \Big[\frac{x\sin(2nx)}{2n}\Big]_0^\pi - \frac{1}{2n}\int_0^\pi \sin(2nx)\,\mathrm{d}x \\ &= 0 + \frac{1}{4n^2}\Big[\cos(2nx)\Big]_0^\pi = \frac{1}{4n^2}(1-1) = 0,\end{aligned}$$

となる。整数 n に対して $\sin(2n\pi) = 0$、$\cos(2n\pi) = 1$ だからである。よって漸化式は

$$J_{n+1} = J_n \qquad (n \geq 1).$$

> **考えてみよう** $J_{n+1} = J_n$ という漸化式は、怪しいほど自明に見える。本当にこれが答えなのだろうか。

その通りである。現れる $2\cos(2nx)$ は、整数個の周期にわたって x を掛けて積分すると 0 になるので、n から次の n へ移っても何も変わらない。値を確定させるには最初の項だけを求めればよい：

$$J_1 = \int_0^\pi \frac{x\sin x}{\sin x}\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{2},$$

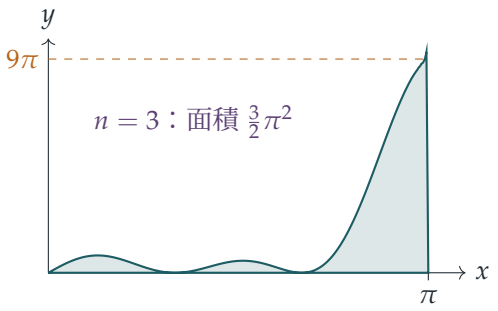
したがって、すべての正の整数 n に対して $J_n = \frac{1}{2}\pi^2$ である。

C の下の面積

$(0,\pi)$ 上で $x \geq 0$ かつ $\sin^2(nx)/\sin^2 x \geq 0$ であるから、曲線は決して x 軸の下に出ない。よって C の下の面積はちょうど I_n に等しい。最初の関係式を足し合わせ（項が順に打ち消し合う）、$I_0 = 0$ を用いると、

$$I_n = I_0 + \sum_{k=1}^{n}(I_k - I_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} J_k = n\cdot\frac{\pi^2}{2}.$$

したがって、C の下の面積は $\frac{1}{2}n\pi^2$ であり、示すべき結果が得られた。



検算

- $n = 1$：曲線は $y = x$ であり、その三角形の面積は $\frac{1}{2}\pi^2$ である。✓
- $n = 1, \ldots, 8$ の積分にシンプソンの公式（Simpson's rule）を適用すると、毎回 $J_n \approx 4.9348022 = \frac{1}{2}\pi^2$ となり、また例えば $I_3 \approx 14.8044066 = \frac{3}{2}\pi^2$ となる。
- 曲線は $x = \pi$ で $y = n^2\pi$ まで上がるが、面積は n について一次でしか増えない。山は高くなるが幅は狭くなる（幅はおよそ π/n）ので、これは矛盾しない。

よくある間違い

- $I_0 = 0$ を忘れる（あるいは I_0 が何を意味するかを確かめない）ために、打ち消し合う和の出発値がなくなってしまう。
- $\int x\cos(2nx)\,\mathrm{d}x$ での符号の誤り。境界項が消え、残る $\sin(2nx)$ の $[0, \pi]$ 上の積分が 0 であることに注目する方がすっきりする。

STEP のその先へ

関数 $\sin^2(nx)/\sin^2 x$ は、因数 $1/n$ を除けば、フーリエ解析（Fourier analysis）における**フェイエール核**（*Fejér kernel*）であり、$\sin\big((2n-1)x\big)/\sin x$ は本質的に**ディリクレ核**（*Dirichlet kernel*）である。ここで見つけた事実、すなわち関数が区間の端に集中していく一方でその積分が n によらないということこそが、フーリエ級数（Fourier series）が収束する（converge）ことの証明においてこれらの核を有用なものにしている。Stein と Shakarchi の *Fourier Analysis: An Introduction*（フーリエ解析入門）はこの内容を見事に展開している。実解析（real analysis）の背景については、Abbott の *Understanding Analysis*（解析学の理解）を参照するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。