解答例

STEP III 1992、第 5 問

純粋数学 ・ 空間ベクトルと図形

> **STEP III 1992、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/92-s3-q5

鍵となる考え方

対称性（symmetry）がほとんどすべての仕事をしてくれる。平面 $y+z=2$ に関する鏡映（reflection）は四面体（tetrahedron）をそれ自身に移し、A と D を固定するので、B と C を入れ替えなければならない。このことから、BC はこの平面に垂直であり、その中点 N はこの平面上にあることがわかる。あとは、4 つの頂点がすべて中心 Y から等距離にあるという事実を用いて、ピタゴラス（Pythagoras）の定理と内積（scalar product）を使うだけである。

解答

N と半径を求める

$\overrightarrow{AY}=(3,-2,4)-(0,4,-2)=(3,-6,6)$ であるから、球（sphere）の半径（radius）は

$$YA=\sqrt{9+36+36}=9.$$

である。$\overrightarrow{AY}=3\overrightarrow{YN}$ より $\overrightarrow{YN}=(1,-2,2)$ となるので、$N=(4,-4,6)$、$YN=3$ である。A、Y、N はいずれも $y+z=2$ を満たすことに注意しよう。つまり、3 点とも対称面（plane of symmetry）上にある。

BC が平面に垂直である理由

平面 $y+z=2$ を Π とする。Π に関する鏡映は四面体をそれ自身に移すので、頂点を並べ替える（permute）。鏡映は Π 上にある A と D を固定する。B も C も Π 上にはない。もしどちらかがそうであれば、鏡映はその点を固定し、さらに残る 4 番目の頂

点も固定しなければならなくなる。すると4つの頂点がすべて Π 上にあることになり、四面体ができない。したがって鏡映は B と C を入れ替える。つまり C は B の鏡像（mirror image）である。ゆえに

- BC は Π に垂直であるから、法線（normal）$(0,1,1)$ に平行である。
- BC の中点 N は Π 上にある（これは先に求めた結果と一致する）。

考えてみよう なぜ三角形 YNB は N で直角なのか？

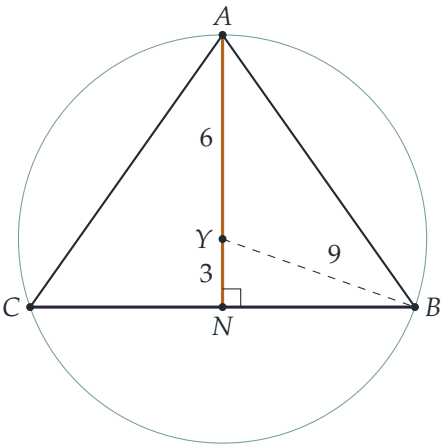
Y と N はともに Π 上にあるので、YN は Π 内の直線である。一方、NB は Π の法線の方向にある。法線は平面内のすべての直線に垂直であるから、$\angle YNB = 90^\circ$ である。

BN と、B および C の座標

B は球面上にあるので $YB = 9$ である。三角形 YNB にピタゴラスの定理を用いると

$$BN^2 = YB^2 - YN^2 = 81 - 9 = 72, \qquad \text{よって} \qquad BN = 6\sqrt{2},$$

となり、示すべき結果が得られた。



図は平面 ABC を正確な縮尺で描いたものである（Y は AN 上にあるので、この平面は Y を含む）。琥珀色の線 AN はこの平面と Π の交線であり、円はこの平面と球面の交わりである。

BC 方向の単位ベクトル（unit vector）は $\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)$ であるから

$$\overrightarrow{NB} = \pm 6\sqrt{2} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1) = \pm(0,6,6).$$

である。$N = (4,-4,6)$ であるから、弦（chord）の両端は $(4,2,12)$ と $(4,-10,0)$ であ

る。よって

$$B=(4,2,12),\ C=(4,-10,0) \qquad \text{または} \qquad B=(4,-10,0),\ C=(4,2,12).$$

確認として、$(4,2,12)-(3,-2,4)=(1,4,8)$ の長さは $\sqrt{1+16+64}=9$ であるから、B は確かに球面上にある。

D の座標

$\overrightarrow{YD}=(p,q,r)$ とおく。条件は 3 つある。

- D と Y はともに Π 上にあるので、$\overrightarrow{YD}$ は法線 $(0,1,1)$ に垂直である：$q+r=0$。
- D は球面上にある：$p^2+q^2+r^2=81$。
- 角の条件：$\overrightarrow{YA}\cdot\overrightarrow{YD}=YA\cdot YD\cos\angle AYD=9\cdot 9\cdot\frac{1}{3}=27$。

> **考えてみよう** 未知数 3 つに対して方程式が 3 つあるが、そのうち 1 つは 2 次式である。解はいくつあると予想されるか？

最終的に 2 次方程式（quadratic）に帰着するので、最大で 2 つである。幾何的には、D は Π と球面の交わりである円（$Y\in\Pi$ なので大円（great circle）である）上にあり、その円上で YA と所定の角をなす点は、A の両側にある互いに鏡像の関係の 2 点である。

$\overrightarrow{YA}=(-3,6,-6)$ と $r=-q$ を用いると、角の条件から

$$-3p+6q+6q=27 \quad\Longrightarrow\quad p=4q-9.$$

が得られる。これを球面の方程式に代入し、$r^2=q^2$ を用いると：

$$\begin{aligned}(4q-9)^2+2q^2&=81\\ 18q^2-72q&=0\\ 18q(q-4)&=0.\end{aligned}$$

- $q=0$：このとき $p=-9$、$r=0$ であるから、$\overrightarrow{YD}=(-9,0,0)$、$D=(-6,-2,4)$ である。
- $q=4$：このとき $p=7$、$r=-4$ であるから、$\overrightarrow{YD}=(7,4,-4)$、$D=(10,2,0)$ である。

どちらも本当の四面体を与える。D は Π 上にあるが直線 AN（平面 ABC のうち Π に含まれる唯一の部分）上にはないので、D は平面 ABC 上にない。ゆえに

$$D=(-6,-2,4) \qquad \text{または} \qquad D=(10,2,0).$$

検算

- 各 D は $y+z=2$ を満たし、どちらの場合も $|\overrightarrow{YD}|^2 = 81$ である（81 および $49+16+16$）。
- $D=(10,2,0)$ のとき：$\overrightarrow{YA}\cdot\overrightarrow{YD} = -21+24+24 = 27 = 81\cdot\frac{1}{3}$。✓
- B と C は互いに鏡像である。(x,y,z) を $y+z=2$ に関して鏡映すると $(x,\,2-z,\,2-y)$ となり、これは $(4,2,12)$ を $(4,-10,0)$ に移す。
- 座標が 20 以下の Π 上のすべての格子点について、球面上にあって $\cos\angle AYD = \frac{1}{3}$ を満たす点をコンピュータで探索したところ、見つかったのはちょうど $(-6,-2,4)$ と $(10,2,0)$ であった。四面体の体積はどちらの場合も $1728/6 = 288$ であり、つぶれていない。

よくある間違い

- N を間違える。$\overrightarrow{AY} = 3\overrightarrow{YN}$ より Y は AN の 4 分の 3 の位置にあるので、$N = Y + \frac{1}{3}\overrightarrow{AY}$ であって、$A+\frac{1}{3}\overrightarrow{AY}$ ではない。
- 半径を YN や AN としてしまう。半径は $YA=9$ であり、$YN=3$ は中心から弦 BC までの距離にすぎない。
- D が Π 上になければならないことを忘れる。$q+r=0$ がなければ、条件を満たす点は円周全体にわたって存在する。

STEP のその先へ

鏡映が B と C を入れ替えなければならないという議論は、群論（group theory）のささやかな一例である。図形の対称性はその頂点を並べ替えるという形で作用し、鏡映の不動点（fixed point）はその鏡面上になければならない。鏡映そのものは線形代数の写像 $\mathbf{x}\mapsto \mathbf{x} - 2\frac{(\mathbf{x}\cdot\mathbf{n}-d)}{|\mathbf{n}|^2}\mathbf{n}$ であり、行列式（determinant）が -1 の直交変換（orthogonal transformation）である。Strang の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は鏡映と直交行列を扱っており、Allenby の *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）は対称性の群を展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。