解答例

STEP III 1992、第 4 問

純粋数学 ・ 直交軌道

> **STEP III 1992、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/92-s3-q4

鍵となる考え方

S_1 の各曲線を $y = 1 + \dfrac{a}{x-a}$ と書く。これは漸近線（asymptote）が $x = a$ と $y = 1$ である直角双曲線（rectangular hyperbola）であり、どの曲線も原点を通る。曲線族全体が満たす微分方程式（differential equation）を求めるには、微分してから曲線自身の方程式を用いて a を消去する。2 曲線が直交するのは、交点での傾きの積が -1 となるときであり、そのときに限る。したがって $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ を $-1/\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ に置き換えると、S_1 の方程式は S_2 の方程式に変わり、これは変数分離形（separable）となる。

解答

S_1 の曲線

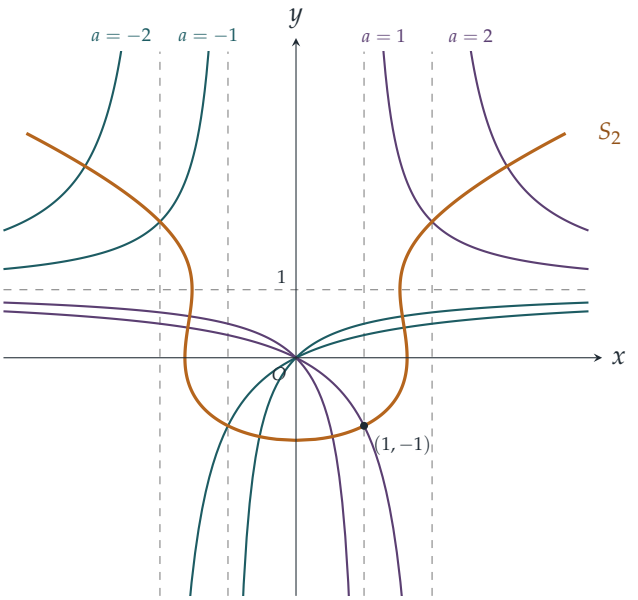
$x = (x-a) + a$ であるから、

$$y = \frac{x}{x-a} = 1 + \frac{a}{x-a}, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{a}{(x-a)^2}.$$

よって $a \neq 0$ のとき、この曲線は鉛直漸近線 $x = a$ と水平漸近線 $y = 1$ をもつ直角双曲線であり、原点を通る。

- $a > 0$ のとき、傾きは常に負である。$x < a$ の枝は（$x \to -\infty$ で）$y = 1$ から下がってきて O を通り、$x \to a^-$ で $-\infty$ へ落ちていく。$x > a$ の枝は $+\infty$ から $y = 1$ に向かって下がっていく。
- $a < 0$ のとき、傾きは常に正である。$x > a$ の枝は $-\infty$ から O を通って $y = 1$ に向かって上がっていく。$x < a$ の枝は $y = 1$ より上にある。

x を $-x$ に置き換えると $\frac{x}{x-a}$ は $\frac{x}{x+a}$ に変わるので、$-a$ に対する曲線は a に対する曲線を y 軸に関して折り返したもの（鏡映、reflection）である。プロットに便利な点：$x = \frac{3}{2}a$ のとき $y = 3$ である。



破線は漸近線である。琥珀色の曲線は $(1, -1)$ を通る S_2 の曲線であり、その形については以下で根拠を示す。

S_1 の微分方程式

$y(x-a) = x$ から $x - a = \dfrac{x}{y}$、$a = x - \dfrac{x}{y} = \dfrac{x(y-1)}{y}$ を得る。（S_1 の曲線上で $y = 0$ となるのは原点だけなので、その点を除けば y で割ってよい。）これを傾きの式に代入すると、

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{a}{(x-a)^2} = -\frac{x(y-1)}{y} \cdot \frac{y^2}{x^2} = -\frac{y(y-1)}{x},$$

となるので、S_1 のすべての曲線は次を満たす。

$$x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y(1-y).$$

S_2 の微分方程式

2 曲線が直交するのは、交点におけるそれぞれの傾きの積が -1 となるときであり、そのときに限る。したがって、共通の点における S_1 の曲線の傾きを p_1、S_2 の曲線の傾きを p_2 とすると $p_1 p_2 = -1$、すなわち $p_1 = -1/p_2$ である。

考えてみよう いま求めた方程式は S_1 に関するものである。なぜそれが S_2 について何かを教えてくれるのだろうか？

各点 (x,y)（ただし $x,y\neq 0$）を通る S_1 の曲線はちょうど 1 本、すなわち $a=x(y-1)/y$ のものであり、その点での傾きは $-y(y-1)/x$ である。同じ点を通る S_2 の曲線の傾きは $p_2=-1/p_1$ でなければならないので、S_2 上では

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{1}{-y(y-1)/x}=\frac{x}{y(y-1)},\qquad \text{すなわち、}\qquad x=y(y-1)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},$$

となり、示すべきことが示された。

$(1,-1)$ を通る S_2 の曲線

この方程式は変数分離できる：

$$\int (y^2-y)\,\mathrm{d}y=\int x\,\mathrm{d}x \quad\Longrightarrow\quad \frac{y^3}{3}-\frac{y^2}{2}=\frac{x^2}{2}+C.$$

$(1,-1)$ において $-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+C$ であるから $C=-\frac{4}{3}$ である。両辺に 6 を掛けると、図に描いた曲線は次のとおりである。

$$3x^2=2y^3-3y^2+8.$$

概形を描くために $g(y)=2y^3-3y^2+8$ とおくと $x=\pm\sqrt{g(y)/3}$ であり、曲線は y 軸に関して対称である。$g'(y)=6y(y-1)$ であるから、g は極大値 $g(0)=8$ と極小値 $g(1)=7$ をとる。どちらも正なので、g の実数の零点は -2 と -1 の間にただ 1 つだけある（$g(-2)=-20$、$g(-1)=3$ であるから）。数値的には $y_0\approx -1.214$ である。よってこの曲線は次のような性質をもつ。

- 最低点は $(0,y_0)$ であり、そこで $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x=0$ である。
- $y=0$ となる点（$x=\pm\sqrt{8/3}\approx\pm 1.63$）と $y=1$ となる点（$x=\pm\sqrt{7/3}\approx\pm 1.53$）で鉛直な接線をもつ。そこでは $y(y-1)=0$ となるからである。
- $y=0$ と $y=1$ の間では軸の方へわずかに折り返し（そこでは $x>0$ に対して傾き $x/(y(y-1))$ は負である）、その後 $|x|$ が大きいところでは $y\approx(\frac{3}{2}x^2)^{1/3}$ のように増加する。

図の検証として、$(1,-1)$ を通る S_1 の曲線は $-1=\frac{1}{1-a}$ を満たすので $a=2$ であり、そこでの傾きは -2 である。S_2 の傾きは $\frac{1}{(-1)(-2)}=\frac{1}{2}$ であり、確かに $(-2)\cdot\frac{1}{2}=-1$ となる。$y=1$ における鉛直な接線も納得がいく。そこで曲線は、S_1 の $a=0$ の曲線である $y=1$ と直交しているのである。

検算

- $(1,-1)$ において：$3(1)^2=3$、$2(-1)^3-3(-1)^2+8=3$。✓
- S_2 の曲線は $a=1$ の曲線と $(2,2)$ で交わる。そこでの S_1 の傾きは $-1/(2-1)^2=-1$、S_2 の傾きは $2/(2\cdot 1)=1$ であり、積は -1 である。
- 数値計算により、琥珀色の曲線と図に描いた 4 本の双曲線との交点 12 個すべて（各 3 個。例えば $a=-2$ とは $(1.5901,\,0.4429)$ で交わる）を求めたところ、各交点で傾きの積は -1.00000000 であった。

よくある間違い

- 微分方程式に a を残してしまう。肝心なのは、$y=x/(x-a)$ そのものを用いてこれを消去することである。
- $p_1p_2=-1$ ではなく $p_2=-p_1$ や $p_2=1/p_1$ を用いてしまう。
- S_2 の曲線を単純な U 字形に描いてしまう。実際には $y=0$ と $y=1$ で鉛直な接線をもち、その間でわずかに後ろへ折り返している。

STEP のその先へ

S_2 の曲線は S_1 の**直交截線**（orthogonal trajectories）である。物理学では、等ポテンシャル線と交わる力線や、速度ポテンシャルが一定の線と交わる流線として現れる。ここでの技法（パラメータを消去し、y' を $-1/y'$ に置き換える）は標準的な方法であり、その結果得られる 1 階の方程式は常微分方程式（ODE）の最初の講義の定番である。Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations* を参照せよ。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。