解答例

# STEP III 1992、第 3 問

純粋数学 ・ 曲線と多項式の根

**STEP III 1992、問 3**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/92-s3-q3

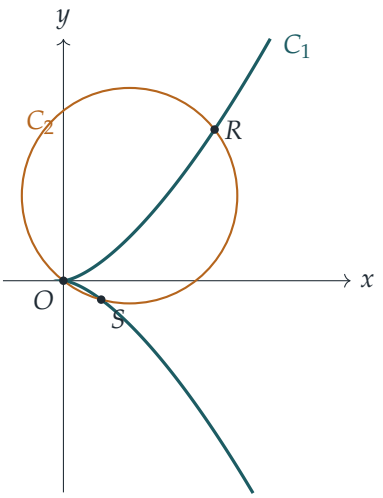
## 鍵となる考え方

パラメータ表示（parametrisation）を、原点を通る円の一般の方程式にそのまま代入する。すると $t$ についての多項式の方程式が得られ、その解が交点のパラメータとなる。原点は因数 $t^2$ として現れる。残るのは $t^3$ の項をもたない 4 次式（quartic）であり、その解の和と、2 つずつの積の和はいずれも決まった値になる。したがって、解のうち 2 つ $r$ と $s$ がわかれば、残りの 2 つは完全に決まる。

## 解答

### 概形

$x = t^2 \geq 0$ であるから、曲線は半平面 $x \geq 0$ に含まれる。$t$ を $-t$ に置き換えると $(x, y)$ は $(x, -y)$ に移るので、曲線は $x$ 軸に関して対称である。$t$ を消去すると $y^2 = x^3$、すなわち $y = \pm x^{3/2}$ を得る。$t = 0$ では $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0$ であり、原点の近くでは $|y| = x^{3/2}$ は $x$ よりはるかに小さい。よって 2 つの枝はいずれも $x$ 軸に接しながら $O$ から出ていき、曲線は $O$ で尖点（cusp）をもつ。$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{3t}{2}$ であるから、$t$ が大きいところでは枝は急激に立ち上がる。




曲線 $C_1$ は青緑色で描いてある。琥珀色の円は $C_2$ の一例であり、$r = 1$、$s = -\frac{1}{2}$ のときの $O$、$R$、$S$ を通る円である。

### 4次方程式

原点を通る円の方程式は定数項をもたない：

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy = 0,$$

ここで $g$ と $f$ は実数の定数で、両方が 0 ではない。パラメータ $t$ の点がこの円上にあるのは、ちょうど

$$t^4 + t^6 + 2gt^2 + 2ft^3 = 0, \qquad \text{すなわち} \qquad t^2\left(t^4 + t^2 + 2ft + 2g\right) = 0.$$

のときである。因数 $t^2$ からは $t = 0$ が得られ、これは原点である。$O$ 以外の交点はすべて $t \neq 0$ であるから、そのパラメータは

$$t^4 + t^2 + at + b = 0, \qquad a = 2f, \quad b = 2g.$$

を満たす。特に $r$ と $s$ はこの方程式の解であり、$a$、$b$ は求められているとおり実数の定数である。

$x \neq 0$ のときは $t = y/x$（$x = 0$ のときは $t = 0$）であるから、$C_1$ の各点のパラメータはただ1つに定まる。よって異なる点 $R$ と $S$ のパラメータは異なり、$r \neq s$ である。また、$C_1$ と $C_2$ の交点は、方程式 $t^2(t^4 + t^2 + at + b) = 0$ の実数解とちょうど1対1に対応する。

### 残りの2つの解

4次方程式の4つの解（実数でも複素数でもよい）を $r$、$s$、$p$、$q$ とする。

$$(t-r)(t-s)(t-p)(t-q) = t^4 + 0\cdot t^3 + 1\cdot t^2 + at + b$$

の係数を比較すると

$$r+s+p+q = 0,$$
$$rs + (r+s)(p+q) + pq = 1.$$

を得る。（ここでは2つずつの積6個を、$rs$、$pq$ と4つの交差項 $rp+rq+sp+sq = (r+s)(p+q)$ にまとめた。）

> **考えてみよう** 4つの解のうち、わかっているのは2つだけである。$a$ と $b$ を知らずに、残りの2つにたどり着くにはどうすればよいか。

$t^3$ と $t^2$ の2つの係数は、円にまったく依存しない。1つ目の式から $p+q = -(r+s)$ である。これを2つ目の式に代入すると

$$pq = 1 - rs + (r+s)^2 = r^2 + rs + s^2 + 1.$$

よって $p$ と $q$ は2次方程式

$$t^2 + (r+s)\,t + \left(r^2 + rs + s^2 + 1\right) = 0,$$

の解であり、その係数は $r$ と $s$ だけで決まる。$C_1$ と $C_2$ にこれ以外の交点があるとすれば、そのパラメータはこの2次方程式の実数解でなければならない。

（副産物として、$a = -(r+s)(r^2+s^2+1)$、$b = rspq = rs(r^2+rs+s^2+1)$ が得られるので、$O$、$R$、$S$ を通る円は $r$ と $s$ によって決まる。）

### これ以外に実数の交点はない

この2次方程式の判別式（discriminant）は

$$\begin{aligned}\Delta &= (r+s)^2 - 4\left(r^2 + rs + s^2 + 1\right)\\ &= -3r^2 - 2rs - 3s^2 - 4\\ &= -\left[2(r^2+s^2) + (r+s)^2 + 4\right].\end{aligned}$$

である。$2(r^2+s^2)$ と $(r+s)^2$ はいずれも0以上であるから、括弧の中は4以上である。よって $\Delta \le -4 < 0$ となり、この2次方程式は実数解をもたない。すなわち $p$ と $q$ は互いに共役な虚数の組である。

したがって $t^2(t^4+t^2+at+b)=0$ の実数解は 0、$r$、$s$ のみである。各実数解は $C_1$ のただ1つの点に対応するから、$C_1$ と $C_2$ の実数の交点は $O$、$R$、$S$ のみである。これが示すべきことであった。

## 検算

$r=1$、$s=-\frac{1}{2}$ とする。公式から $a=-\frac{9}{8}$、$b=-\frac{7}{8}$ となるので、$f=-\frac{9}{16}$、$g=-\frac{7}{16}$ である。円の中心は $(\frac{7}{16},\frac{9}{16})$ であり、$R=(1,1)$ と $S=(\frac{1}{4},-\frac{1}{8})$ はいずれも中心からの距離の2乗が $\frac{130}{256}$ で、$O$ も同様である。残る2次式は $t^2+\frac{1}{2}t+\frac{7}{4}$ で、判別式は $\frac{1}{4}-7<0$ である。これが図の円であり、$C_1$ と交わるのが $O$、$R$、$S$ だけであることが図からも見てとれる。さらに、ランダムに選んだ400組の $(r,s)$ について数値的にも確かめた。各組について $O$、$R$、$S$ を通る円を求め、因数分解を確認し、$-30\le t\le 30$ の範囲を調べたところ、円の方程式の符号が変わるのは $t=r$ と $t=s$ のときだけであった。

## よくある間違い

- $O$ を通る円には定数項がないことを忘れる。一般の円には3つの定数があり、定数項が消えることこそが因数 $t^2$ が現れる理由である。
- 重解（double root）$t=0$ は円が $O$ で $C_1$ に接することを意味すると考えてしまう。これは尖点に由来するものであり、$O$ を通るどんな円でも $t^2$ が因数として現れる。
- 判別式を、平方の和に正の定数を加えたものに負号をつけた形に書かずに、「明らかに負」と述べてしまう。

## STEP のその先へ

曲線 $y^2=x^3$ は特異3次曲線（singular cubic curve）の代表的な例である。ここで行ったように重複度（multiplicity）をこめて交点を数えることは、ベズー（Bézout）の定理の出発点である。この定理によれば、$m$ 次と $n$ 次の曲線は、正しく数えれば $mn$ 個の点で交わる。3次曲線と円なら6個であり、これは $O$ での2個、$R$、$S$、そして2つの複素数の点と一致する。同じヴィエト（Vieta）型の計算が、楕円曲線（elliptic curve）上の群演算（group law）の原動力となっている。Reid の *Undergraduate Algebraic Geometry*（学部生のための代数幾何学）と、Silverman と Tate の *Rational Points on Elliptic Curves*（楕円曲線上の有理点）は、いずれもこれらの考え方をさらに先へと進めている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。