解答例

STEP III 1992、第 2 問

純粋数学 ・ 行列の累乗と数学的帰納法

> **STEP III 1992、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/92-s3-q2

鍵となる考え方

すべては $\mathbf{J}^2 = 2\mathbf{J}$ という一つの事実に基づいている。これにより、$\mathbf{I} + p\mathbf{J}$ の形をした行列（matrix）どうしの積はどれも再びこの形になる。したがって、追いかけるべき数はつねに一つだけである。一見ややこしい $\frac{1}{2}[(1+2a)^k - 1]$ という式も、掛け算に対して素直に振る舞うのは p ではなく $1+2p$ であると気づけば、見通しがよくなる。

解答

掛け算の規則

$$\mathbf{J}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2\mathbf{J},$$

であり、$\mathbf{I}$ はどの行列とも可換（commute）であるから、任意の実数 p, q に対して

$$(\mathbf{I} + p\mathbf{J})(\mathbf{I} + q\mathbf{J}) = \mathbf{I} + (p+q)\mathbf{J} + pq\mathbf{J}^2 = \mathbf{I} + (p+q+2pq)\mathbf{J}. \qquad (*)$$

が成り立つ。ここで

$$1 + 2(p+q+2pq) = (1+2p)(1+2q),$$

であることに注意する。つまり、行列 $\mathbf{I} + p\mathbf{J}$ に数 $1+2p$ を対応させると、行列の掛け算はこれらの数の掛け算に対応する。$\mathbf{A} = \mathbf{I} + a\mathbf{J}$ に対応する数は $1+2a$ である。

2乗と3乗

$(*)$ で $p=q=a$ とすると、

$$\mathbf{A}^2=\mathbf{I}+(2a+2a^2)\mathbf{J},\qquad \text{また}\qquad \tfrac{1}{2}[(1+2a)^2-1]=\tfrac{1}{2}(4a+4a^2)=2a+2a^2,$$

であるから、求めるとおり $\mathbf{A}^2=\mathbf{I}+\frac{1}{2}[(1+2a)^2-1]\mathbf{J}$ となる。

3乗については、$\mathbf{A}^3=\mathbf{A}^2\mathbf{A}$ と書き、$(*)$ で $p=2a+2a^2, q=a$ とすると

$$\begin{aligned}p+q+2pq&=2a+2a^2+a+2a(2a+2a^2)\\&=3a+6a^2+4a^3\\&=\tfrac{1}{2}(6a+12a^2+8a^3)=\tfrac{1}{2}[(1+2a)^3-1],\end{aligned}$$

となる。ここで $(1+2a)^3=1+6a+12a^2+8a^3$ を用いた。よって、求めるとおり $\mathbf{A}^3=\mathbf{I}+\frac{1}{2}[(1+2a)^3-1]\mathbf{J}$ である。

4乗については、$\mathbf{A}^4=\mathbf{A}^2\mathbf{A}^2$ とするのがいちばん早い。$p=q=\frac{1}{2}[(1+2a)^2-1]$ とすると $1+2p=(1+2a)^2$ であるから、$\mathbf{A}^4$ に対応する数は $(1+2a)^2(1+2a)^2=(1+2a)^4$ である。したがって

$$\mathbf{A}^4=\mathbf{I}+\tfrac{1}{2}[(1+2a)^4-1]\mathbf{J}=\mathbf{I}+(4a+12a^2+16a^3+8a^4)\mathbf{J}.$$

一般の累乗

ここまでの規則性から、次のように予想できる。

$$p_k=\tfrac{1}{2}[(1+2a)^k-1],\qquad \text{すなわち}\qquad 1+2p_k=(1+2a)^k.$$

すべての整数 $k\geq 1$ に対して $\mathbf{A}^k=\mathbf{I}+p_k\mathbf{J}$ が成り立つことを、数学的帰納法（induction）で証明する。

基本段階。 $k=1$ のとき $p_1=\frac{1}{2}(1+2a-1)=a$ であり、$\mathbf{A}^1=\mathbf{I}+a\mathbf{J}$ である。（この式は $p_0=0$ も与え、$\mathbf{A}^0=\mathbf{I}$ と一致する。）

帰納段階。 p_k を上のとおりとして $\mathbf{A}^k=\mathbf{I}+p_k\mathbf{J}$ が成り立つと仮定する。すると $(*)$ より

$$\mathbf{A}^{k+1}=\mathbf{A}^k\mathbf{A}=\mathbf{I}+(p_k+a+2ap_k)\mathbf{J},$$

であり、

$$\begin{aligned}p_k+a+2ap_k&=(1+2a)p_k+a\\&=\tfrac{1}{2}(1+2a)[(1+2a)^k-1]+a\\&=\tfrac{1}{2}(1+2a)^{k+1}-\tfrac{1}{2}(1+2a)+a\\&=\tfrac{1}{2}[(1+2a)^{k+1}-1]=p_{k+1}.\end{aligned}$$

となる。よって $\mathbf{A}^{k+1} = \mathbf{I} + p_{k+1}\mathbf{J}$ であり、数学的帰納法により

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{I} + \tfrac{1}{2}[(1+2a)^k - 1]\mathbf{J} \qquad \text{任意の整数} k \geq 1.$$

が成り立つ。

> **考えてみよう** もし $\mathbf{A}^2$ と $\mathbf{A}^3$ が与えられていなかったら、p_k の予想はどこから得られただろうか？

漸化式（recurrence）そのものから得られる。帰納段階から $p_{k+1} = (1+2a)p_k + a$ がわかり、これは 1 階線形漸化式（first-order linear recurrence）である。両辺に $\frac{1}{2}$ を加えると $p_{k+1} + \frac{1}{2} = (1+2a)(p_k + \frac{1}{2})$ となるので、$p_k + \frac{1}{2}$ は公比 $1+2a$、初項 $a + \frac{1}{2}$ の等比数列（geometric sequence）である。これはまさに $p_k + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(1+2a)^k$ ということである。

負の累乗（おまけ）。 $a \neq -\frac{1}{2}$ ならば、この式は $k = -1$ に対しても成り立つ。実際、$p_{-1} = -\dfrac{a}{1+2a}$ とすると、$(*)$ より $a + p_{-1} + 2ap_{-1} = a - \dfrac{a(1+2a)}{1+2a} = 0$ となるので、$(\mathbf{I} + a\mathbf{J})(\mathbf{I} + p_{-1}\mathbf{J}) = \mathbf{I}$ である。$a = -\frac{1}{2}$ のときは $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ は正則でない（singular）。このとき式はすべての $k \geq 1$ に対して $p_k = -\frac{1}{2}$ を与えるが、実際 $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$ である。

検算

- $a = 1$ とすると $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ であり、実際に掛け算すると $\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}^4 = \begin{pmatrix} 41 & 40 \\ 40 & 41 \end{pmatrix}$ となる。式からは $p_2 = \frac{1}{2}(9-1) = 4$, $p_4 = \frac{1}{2}(81-1) = 40$ が得られる。
- $\mathbf{A}$ は固有値（eigenvalue）$1+2a$ に対する固有ベクトル（eigenvector）$(1,1)$ と、固有値 1 に対する固有ベクトル $(1,-1)$ をもつ。よって $\mathbf{A}^k$ の固有値は $(1+2a)^k$ と 1 である。一方、行列 $\mathbf{I} + p_k\mathbf{J}$ の固有値は $1 + 2p_k$ と 1 であり、両者は一致する。
- $0 \leq k \leq 12$ および $a = -\frac{1}{2}$ を含む 40 個のランダムな a の値について、厳密な有理数演算で $\mathbf{A}^k = \mathbf{I} + p_k\mathbf{J}$ を確認した。

よくある間違い

- $(\mathbf{I}+a\mathbf{J})^k$ を二項定理（binomial theorem）で展開するのは（$\mathbf{I}$ と $\mathbf{J}$ が可換なので）正当であるが、$\mathbf{J}$ ではなく $\mathbf{J}^r = 2^{r-1}\mathbf{J}$ となることを忘れると、係数を誤る。
- 帰納段階で、p_{k+1} についての結論を先に書いて逆向きにたどるのは証明にならない。$\mathbf{A}^k\mathbf{A}$ から出発すること。

STEP のその先へ

$\mathbf{I}+p\mathbf{J}$ に対応させた数 $1+2p$ は、この行列のベクトル $(1,1)$ に対する固有値である。このような行列はすべて固有ベクトル $(1,1)$ と $(1,-1)$ を共有しているので、同じ基底の変換（change of basis）によっていっせいに対角化され、累乗は固有値を単に k 乗するだけで計算できる。これが対角化（diagonalisation）の考え方であり、行列の累乗、行列の指数関数（matrix exponential）、線形漸化式をスカラーの計算に帰着させる。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は、多くの例題とともにこの考え方を展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。