解答例

STEP III 1992、第 15 問

確率・統計 ・ 幾何的確率

> **STEP III 1992、問 15**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/92-s3-q15

鍵となる考え方

ヤギの位置は牧草地全体で一様（uniform）に分布するので、どの確率も単に面積を a^2 で割ったものになる。したがって問題全体は、正方形のうち角 O からの距離が r 以内にある部分の面積を求めることに帰着する。r が a を超えると四分円が正方形からはみ出すが、内側に残る面積を求めるには、それを 2 つの直角三角形と 1 つの扇形（sector）に切り分けるのがすっきりした方法である。確率密度は微分によって得られ、つながれたヤギの問題も、領域が異なるだけで同じ考え方で解ける。

解答

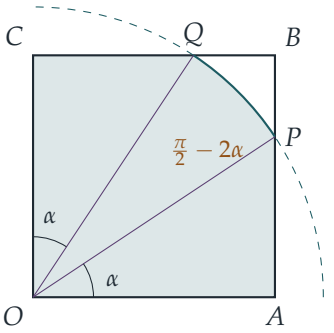
O を原点に置き、OA を x 軸方向、OC を y 軸方向にとると、牧草地は $0 \le x \le a$, $0 \le y \le a$ となる。$F(r) = \mathrm{P}(R < r)$ とおく。これは牧草地のうち $x^2 + y^2 < r^2$ を満たす部分の面積を a^2 で割ったものである。

R の分布

$0 < r \le a$ のとき。O を中心とする半径 r の四分円板は牧草地の内部に完全に含まれるので、

$$F(r) = \frac{\frac{1}{4}\pi r^2}{a^2} = \frac{\pi r^2}{4a^2}.$$

$a \le r \le a\sqrt{2}$ のとき。このとき弧は辺 AB（直線 $x = a$）と $P = (a, \sqrt{r^2 - a^2})$ で交わり、辺 CB（直線 $y = a$）と $Q = (\sqrt{r^2 - a^2}, a)$ で交わる。$\alpha = \cos^{-1}(a/r)$ とおくと、これは角 AOP である（$\cos \angle AOP = a/r$ だからである）。対称性より、角 COQ も α である。



影をつけた領域（牧草地のうち O からの距離が r 以内の部分）は 3 つの部分に分かれる。

- 三角形 OAP。A で直角となり、直角をはさむ 2 辺は a と $\sqrt{r^2 - a^2}$ なので、面積は $\frac{1}{2}a\sqrt{r^2 - a^2}$ である。
- 三角形 OCQ。これは前者と合同で、面積も等しい。
- 半径 r、中心角 $\frac{\pi}{2} - 2\alpha$ の扇形 OPQ。面積は $\frac{1}{2}r^2\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) = \frac{\pi r^2}{4} - r^2\alpha$ である。

これらを足して a^2 で割ると、

$$\begin{aligned} F(r) &= \frac{a\sqrt{r^2 - a^2}}{a^2} + \frac{\pi r^2}{4a^2} - \frac{r^2}{a^2}\,\alpha \\ &= \left(\frac{r^2}{a^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\pi r^2}{4a^2} - \frac{r^2}{a^2}\cos^{-1}\left(\frac{a}{r}\right), \end{aligned}$$

となり、これが求める結果である。（$r \geq a\sqrt{2}$ のときは牧草地全体が O から距離 r 以内にあるので、$F(r) = 1$ である。実際、この式は $r = a\sqrt{2}$ で $1 + \frac{\pi}{2} - 2 \cdot \frac{\pi}{4} = 1$ を与え、期待どおりである。）

中央値

$r = a$ では $F(a) = \pi/4 \approx 0.785 > \frac{1}{2}$ なので、中央値（median）m は $0 < m < a$ の範囲にあり、そこでは簡単な式が成り立つ。

$$\frac{\pi m^2}{4a^2} = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad m = a\sqrt{\frac{2}{\pi}} \approx 0.798a.$$

確率密度関数

確率密度関数（probability density function）は $f(r) = F'(r)$ である。$0 < r < a$ では $f(r) = \dfrac{\pi r}{2a^2}$ となる。

$a < r < a\sqrt{2}$ では $\cos^{-1}(a/r)$ の導関数が必要である。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\cos^{-1}\left(\frac{a}{r}\right) = -\frac{1}{\sqrt{1-a^2/r^2}}\cdot\left(-\frac{a}{r^2}\right) = \frac{a}{r\sqrt{r^2-a^2}}.$$

そこで F の各項を微分すると（最後の項には積の微分法（product rule）を用いる）、

$$\begin{aligned} f(r) &= \frac{r}{a\sqrt{r^2-a^2}} + \frac{\pi r}{2a^2} - \frac{2r}{a^2}\cos^{-1}\left(\frac{a}{r}\right) - \frac{r^2}{a^2}\cdot\frac{a}{r\sqrt{r^2-a^2}} \\ &= \frac{r}{a^2}\left(\frac{\pi}{2} - 2\cos^{-1}\left(\frac{a}{r}\right)\right), \end{aligned}$$

となる。最初の項と最後の項が打ち消し合うからである。よって

$$f(r) = \begin{cases} \dfrac{\pi r}{2a^2}, & 0 < r \le a, \\ \dfrac{r}{a^2}\left(\dfrac{\pi}{2} - 2\cos^{-1}\left(\dfrac{a}{r}\right)\right), & a < r \le a\sqrt{2}, \\ 0, & \text{それ以外.} \end{cases}$$

これは幾何的にも納得がいく。$f(r)\,\mathrm{d}r$ は（牧草地内にある半径 r の円の弧の長さ）$\times\,\mathrm{d}r/a^2$ であり、その弧が張る中心角は $r \le a$ のとき $\frac{\pi}{2}$、$r > a$ のとき $\frac{\pi}{2} - 2\alpha$ である。2 つの式は $r = a$ で一致し（どちらも $\pi/(2a)$ を与える）、f は $\alpha = \pi/4$ となる $r = a\sqrt{2}$ で 0 まで下がる。

つながれたヤギ

つながれると、ヤギが到達できるのは牧草地のうち $R \le a$ を満たす点、すなわち O を中心とする半径 a の四分円板だけであり、その面積は $\frac{1}{4}\pi a^2$ である。ヤギの位置は依然として一様分布に従うが、今度はこの四分円板上での一様分布である。これはちょうど、もとのモデルを事象 $R \le a$ で条件づけたもの、すなわち条件付き確率（conditional probability）の設定にほかならない。

考えてみよう 柵 OC からの距離を表すのはどの座標か？

OC を y 軸方向にとっているので、OC からの距離は x である。したがって、四分円板のうち $x > a/2$ を満たす部分の面積が必要である。

$$\begin{aligned} \int_{a/2}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_{a/2}^{a} \\ &= \frac{\pi a^2}{4} - \left(\frac{\sqrt{3}\,a^2}{8} + \frac{\pi a^2}{12}\right) = \frac{\pi a^2}{6} - \frac{\sqrt{3}\,a^2}{8}. \end{aligned}$$

（幾何的には、これは中心角 $\pi/3$ の扇形から、2 辺が $a/2$ と $\sqrt{3}a/2$ の三角形を除いたものである。直線 $x = a/2$ は OA から角 $\pi/3$ の位置で弧と交わるからである。）四分

円板の面積 $\frac{1}{4}\pi a^2$ で割ると、

$$\mathrm{P}\left(\text{柵からの距離}OC > \tfrac{a}{2} \,\middle|\, R \le a\right) = \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \approx 0.391.$$

検算

- 連続性：F の 2 つの式はどちらも $r = a$ で $\pi/4$ を与え、また $F(a\sqrt{2}) = 1$ である。
- 単位正方形内の 4×10^5 個の一様な点を用いたモンテカルロ・シミュレーション（Monte Carlo simulation）は、$r = 0.3, 0.7, 1.1, 1.25, 1.4$ において $F(r)$ と小数第 3 位程度まで一致した。標本中央値は 0.7986 で、$\sqrt{2/\pi} = 0.7979$ と比べられ、条件付きの割合は 0.3914 で、$\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2\pi} = 0.3910$ と比べられる。
- 確率密度を $[0, a\sqrt{2}]$ 上で数値積分すると 1 になり、いくつかの点で F の数値微分とも一致する。
- つながれた場合の答えは $\frac{1}{2}$ より小さく、これは期待どおりである。四分円板は OC から遠いところほど細くなっているからである。

よくある間違い

- 中央値を求める際に、$r > a$ では F に別の式が必要であることを忘れる。まず $F(a) > \frac{1}{2}$ を確かめておくとよい。それにより中央値が簡単な範囲にあることがわかる。
- 扇形の中心角として $\frac{\pi}{2} - 2\alpha$ ではなく $\frac{\pi}{2} - \alpha$ を用いてしまう。角の部分は両側に 1 つずつ、計 2 つ切り取られる。
- つながれた場合の問題で a^2 で割ってしまう。条件付き確率では四分円板の面積 $\frac{1}{4}\pi a^2$ で割る。

STEP のその先へ

ここで R は、ある領域内で一様に選ばれた点の関数であり、その分布は $R < r$ となる領域の大きさを測ることで得られた。これは確率変数の関数の分布を求める一般的な方法であり、密度の式 $f(r) = (\text{弧の長さ})/a^2$ は、領域を等位集合に切り分けるという「余面積（coarea）」の考え方への最初の入り口である。同じ幾何的な推論は、ビュフォン（Buffon）の針の問題や、正方形内の 2 つのランダムな点の間の距離といった問題の背後にもある。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）、お

よび Blitzstein と Hwang の *Introduction to Probability*（確率論入門）は、いずれも連続確率変数に対するこの幾何的なアプローチを展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。