解答例

STEP III 1992、第 14 問

力学 ・ ほどける糸の力学

> **STEP III 1992、問 14**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/92-s3-q14

鍵となる考え方

すべては一つの角 θ によって決まる。糸の自由な部分は Q において円板に接しており、その長さは円板からほどけた糸の弧の長さに等しいので、P の位置は θ を用いて容易に表せる（描かれる曲線は円の**伸開線**（involute）である）。微分すると、P の速度（velocity）は糸に垂直であることがわかる。したがって糸の張力（tension）は仕事をせず、運動方向に働くのは摩擦（friction）だけである。そこで PQ に沿った方向と PQ に垂直な方向に分解すると、問題はきれいに二つに分かれる。

解答

P の位置

P を水平な台の上の質点とみなし、抵抗は与えられた摩擦のみとし、糸は軽く伸び縮みしないものとする。重力と垂直抗力は打ち消し合うので、水平方向の力は PQ に沿った張力 T と摩擦だけである。

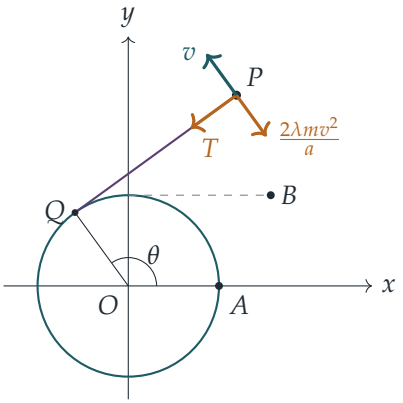
$A = (a, 0)$ を x 軸上にとると、接点は $Q = (a\cos\theta, a\sin\theta)$ である。P が A にあったとき、糸はすべて円板に巻きついていた。糸は伸び縮みしないので、自由な部分 QP の長さはほどけた弧 AQ の長さ、すなわち $a\theta$ に等しい。糸は Q で接しているので QP は OQ に垂直であり、その向きは単位ベクトル（unit vector）$(\sin\theta, -\cos\theta)$ の向きである（$\theta = \frac{\pi}{2}$ のときこれは $(1, 0)$ であり、図のように円板の最上点から B の方を向く）。よって

$$\overrightarrow{OP} = a(\cos\theta, \sin\theta) + a\theta(\sin\theta, -\cos\theta),$$

すなわち

$$x = a\cos\theta + a\theta\sin\theta, \qquad y = a\sin\theta - a\theta\cos\theta.$$

前者が求める x 座標である。B では自由な糸は OA に平行で、円板の最上点で接しているので、そこでは $\theta = \frac{\pi}{2}$ であり、$B = (\frac{\pi a}{2}, a)$ となる。



速度と加速度

OQ 方向の単位ベクトルを $\mathbf{e} = (\cos\theta, \sin\theta)$、$P$ から Q へ向かう単位ベクトル（上の糸の向きの逆）を $\mathbf{f} = (-\sin\theta, \cos\theta)$ とおく。$\dot{\mathbf{e}} = \dot\theta\,\mathbf{f}$、$\dot{\mathbf{f}} = -\dot\theta\,\mathbf{e}$ であることに注意する。

x と y を微分すると

$$\dot x = (-a\sin\theta + a\sin\theta + a\theta\cos\theta)\,\dot\theta = a\theta\dot\theta\cos\theta,$$
$$\dot y = (a\cos\theta - a\cos\theta + a\theta\sin\theta)\,\dot\theta = a\theta\dot\theta\sin\theta,$$

となるので、速度は $a\theta\dot\theta\,\mathbf{e}$ である。これは OQ に平行であり、したがって糸に垂直である。積の微分法則（product rule）を用いてもう一度微分すると

$$\ddot{\mathbf{r}} = a(\dot\theta^2 + \theta\ddot\theta)\,\mathbf{e} + a\theta\dot\theta\,\dot{\mathbf{e}} = a(\dot\theta^2 + \theta\ddot\theta)\,\mathbf{e} + a\theta\dot\theta^2\,\mathbf{f}.$$

よって加速度（acceleration）は、PQ に沿った（Q へ向かう）成分が $a\theta\dot\theta^2$、PQ に垂直な（$\mathbf{e}$ の向きの）成分が $a\dot\theta^2 + a\theta\ddot\theta$ であり、題意が示された。

運動方程式

B では $\theta = \frac{\pi}{2}$ であり、速度は $a\cdot\frac{\pi}{2}\,\dot\theta\,(0,1)$ である。OA に垂直に、OA から遠ざかる向きに打ち出すということは、速度が y 軸の正の向きに大きさ V であることを意味するので

$$\dot\theta = \frac{2V}{\pi a} > 0 \quad \text{（初期において）}$$

である。$\dot\theta > 0$ である間は、速さは $v = a\theta\dot\theta$ で運動の向きは $+\mathbf{e}$ であるから、大きさ $2\lambda m v^2/a = 2\lambda m a\theta^2\dot\theta^2$ の摩擦が $-\mathbf{e}$ の向きに働く。張力は $\mathbf{f}$ に沿って働き、$\mathbf{e}$ 成分をもたない。

考えてみよう θ だけの方程式を得るには、二つの加速度成分のどちらを使えばよいか。

垂直成分である。張力 T は未知であり、それは PQ に沿った成分にしか現れない。PQ に垂直な方向にニュートンの第 2 法則（Newton's second law）を適用すると

$$m(a\dot\theta^2 + a\theta\ddot\theta) = -2\lambda m a\theta^2\dot\theta^2.$$

$ma\theta\dot\theta$ で割ると（$\theta > 0$ かつ $\dot\theta > 0$ なので割ってよい）

$$\frac{\ddot\theta}{\dot\theta} = -\left(\frac{1}{\theta} + 2\lambda\theta\right)\dot\theta,$$

となり、これが求める結果である。

$\dot\theta$ を求める

左辺は $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\dot\theta$ であり、合成関数の微分法則（chain rule）により右辺は $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-\ln\theta - \lambda\theta^2)$ である。よって

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\ln(\theta\dot\theta) + \lambda\theta^2\Big) = 0, \qquad \text{よって} \qquad \theta\dot\theta\,\mathrm{e}^{\lambda\theta^2} = \text{定数}.$$

B においてこの定数は $\frac{\pi}{2}\cdot\frac{2V}{\pi a}\,\mathrm{e}^{\lambda\pi^2/4} = \frac{V}{a}\,\mathrm{e}^{\lambda\pi^2/4}$ である。したがって

$$\dot\theta = \frac{V}{a\theta}\,\exp\Big(\lambda\Big(\frac{\pi^2}{4} - \theta^2\Big)\Big).$$

これはすべての θ に対して正であるから、$\dot\theta$ が 0 になることはなく、上で用いた仮定 $\dot\theta > 0$ は常に成り立つ。（答えには θ、λ、a に加えて V も必ず含まれる。）同値な言い方をすれば、速さは $v = a\theta\dot\theta = V\mathrm{e}^{\lambda(\pi^2/4 - \theta^2)}$ である。

$\theta = \pi$ における張力

PQ に沿って働く力は Q へ向かう T だけなので、$T = ma\theta\dot\theta^2$ である。$\theta = \pi$ のとき

$$\dot\theta^2 = \frac{V^2}{a^2\pi^2}\,\mathrm{e}^{2\lambda(\pi^2/4 - \pi^2)} = \frac{V^2}{a^2\pi^2}\,\mathrm{e}^{-3\lambda\pi^2/2},$$

であるから

$$T = ma\pi\cdot\frac{V^2}{a^2\pi^2}\,\mathrm{e}^{-3\lambda\pi^2/2} = \frac{mV^2}{\pi a}\,\mathrm{e}^{-3\lambda\pi^2/2}.$$

検算

- 自由な糸 PQ の長さは $a\theta$ であり、これは伸開線の曲率半径（radius of curvature）である。よって Q は曲率中心（centre of curvature）であり、Q へ向かう成分は $v^2/(a\theta) = a\theta\dot{\theta}^2$ となるはずである。実際そうなっている。
- $\lambda = 0$（摩擦なし）のとき速さは V のまま一定である。張力は運動に垂直で仕事をしないので、当然そうなるべきである。$\theta = \frac{\pi}{2}$ では $T = mV^2/(\frac{\pi}{2}a)$ であり、これは B における糸の長さ $r = \frac{\pi a}{2}$ に対する mv^2/r である。
- 数値的に、$a = 1.3$、$m = 0.7$、$V = 2.1$、$\lambda = 0.25$ として θ の方程式をルンゲ＝クッタ法（Runge–Kutta method）で数値積分したところ、$\dot{\theta}$ の公式と 10^{-14} の精度で一致した。(x, y) の差分（finite-difference）による加速度は両成分および摩擦と一致し、$\theta = \pi$ において $T \approx 0.018667$ を与え、公式と合致した。

よくある間違い

- 初期値として $\theta = 0$ を用いること。質点は A ではなく、$\theta = \frac{\pi}{2}$ である B から出発する。
- $\dot{\theta}$ を求めるのに PQ に沿って分解すること。その方程式には未知の張力が含まれ、しかも摩擦はその方向の成分をもたない。
- 摩擦が速度に逆向きであり、その速度は糸に沿った方向ではなく OQ に沿った方向であることを忘れること。

STEP のその先へ

P の軌跡は円の伸開線である。これは糸巻きからほどける張った糸の端が描く曲線であり、ほとんどの歯車の歯の形に用いられている曲線でもある。ここで用いた事実（速度が糸に垂直であること、および糸の長さが曲率半径であること）は、曲線の微分幾何学（differential geometry）における縮閉線（evolute）と伸開線の関係の特別な場合である。力学的には、接線成分と法線成分による自然座標（intrinsic components）を用いて、既知の力と未知の拘束力（constraint force）を分離するよい例である。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、極座標（polar coordinates）や自然座標による運動、および拘束運動をこの考え方で扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。