解答例

STEP III 1992、第 13 問

力学 ・ 固定軸まわりの回転

> **STEP III 1992、問 13**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/92-s3-q13

鍵となる考え方

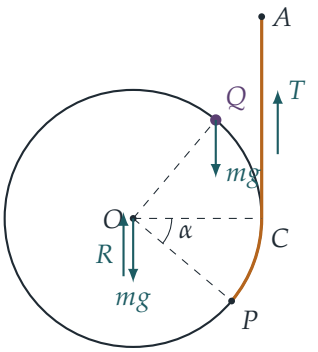
軸は固定されているので、円板と質点は一つの剛体（rigid body）をなし、その座標は回転角ただ一つである。エネルギー保存則（conservation of energy）（弾性・重力・運動の各エネルギー）から各位置での角速度（angular speed）が得られ、「P が C に達する」とは、途中で運動エネルギーが決して 0 にならないということにすぎない。C での角速度が求まれば、軸に働く抗力（reaction）は、系全体に対するニュートン（Newton）の第 2 法則を重心（centre of mass）に適用して得られる。

解答

モデルと幾何

Q を質点とみなし、糸は軽いとする。円板の縁はなめらかであるとするので、張力（tension）T は糸全体で等しく、糸が縁に及ぼす垂直抗力（normal contact force）は O を通る。したがって、糸の O のまわりのモーメント（moment）は、P で接線方向に引く張力によるものだけであり、それは $2bT$ である。（張力が、糸が縁を離れる点 C において AC に沿って鉛直上向きに、O から距離 $2b$ のところに働くとみなしても、まったく同じモーメントが得られる。）

$\alpha = \angle POC$ とし、P は OC の下側にあるとする。放した瞬間は $\alpha = \frac{\pi}{2}$ であり、P が C に達するのは $\alpha = 0$ のときである。$\angle POQ = 90^\circ$ であるから、OQ は OC の上方に角 $\frac{\pi}{2} - \alpha$ をなし、Q は O より高さ $2b\cos\alpha$ のところにある。特に、Q は初め（C にあって）O と同じ高さにあり、P が C に達したときには O の真上にある。



糸の全長は $AC + \text{弧}CP = \pi b + 2b\alpha$ であり、自然長（natural length）は πb であるから、伸び（extension）は $2b\alpha$ である。フックの法則（Hooke's law）により

$$T = \frac{kmg \cdot 2b\alpha}{\pi b} = \frac{2kmg\alpha}{\pi},$$

であり、蓄えられる弾性エネルギー（elastic energy）は

$$E(\alpha) = \frac{kmg\,(2b\alpha)^2}{2\pi b} = \frac{2kmgb\,\alpha^2}{\pi}.$$

である。

軸のまわりの慣性モーメント（moment of inertia）は、円板のものと縁にある Q のものとの和である：

$$I = \tfrac{1}{2}m(2b)^2 + m(2b)^2 = 6mb^2.$$

P は C に達する

円板が回転して P が C に向かって上がる（すなわち α が減少する）につれて、糸は縮んで弾性エネルギーを放出し、一方で Q は上昇する。軸は固定されていてなめらかであるから、エネルギーは保存される。系は $\alpha = \frac{\pi}{2}$ で静止状態から動き始め、そこでは Q の O に対する高さは 0、$E = \frac{1}{2}\pi kmgb$ であるから、

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}I\dot{\alpha}^2 &= E\left(\tfrac{\pi}{2}\right) - E(\alpha) - mg \cdot 2b\cos\alpha \\ &= \frac{2kmgb}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{4} - \alpha^2\right) - 2mgb\cos\alpha.\end{aligned}$$

円板は実際に正しい向きに回り始める。放した瞬間、糸は半径 $2b$ のところを $T = kmg$ で引き、一方 Q の重さは水平距離 $2b$ のところで逆向きに働くので、正味のモーメントは $2(k-1)mgb > 0$ となる。$k > \frac{4}{\pi} > 1$ だからである。

P が C に達するのは、$[0, \frac{\pi}{2})$ のすべての α で運動エネルギーが正のままであるとき、すなわち

$$\frac{k}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{4} - \alpha^2\right) > \cos\alpha \qquad \text{ただし} 0 \le \alpha < \tfrac{\pi}{2}.$$

が成り立つときである。$k > \frac{4}{\pi}$ かつ $\frac{\pi^2}{4} - \alpha^2 > 0$ であるから、左辺は

$$\frac{4}{\pi^2}\left(\frac{\pi^2}{4} - \alpha^2\right) = 1 - \frac{4\alpha^2}{\pi^2},$$

より大きい。よって、$[0, \frac{\pi}{2}]$ 上で $g(\alpha) = 1 - \dfrac{4\alpha^2}{\pi^2} - \cos\alpha \geq 0$ を示せば十分である。

考えてみよう 区間全体で 2 次式と $\cos\alpha$ を比較するにはどうすればよいか？

第 2 次導関数（second derivative）を調べる。$g(0) = g(\frac{\pi}{2}) = 0$、$g'(\alpha) = -\frac{8\alpha}{\pi^2} + \sin\alpha$ より $g'(0) = 0$ であり、$g''(\alpha) = \cos\alpha - \frac{8}{\pi^2}$ である。$\frac{8}{\pi^2} < 1$ であり、$\cos\alpha$ は 1 から 0 まで減少するので、$[0, \alpha_0)$ で $g'' > 0$、$(\alpha_0, \frac{\pi}{2}]$ で $g'' < 0$ となる α_0 がただ一つ存在する。

- $[0, \alpha_0]$ 上では、g' は $g'(0) = 0$ から増加するので $g' \geq 0$ であり、$g \geq g(0) = 0$ である。
- $[\alpha_0, \frac{\pi}{2}]$ 上では、g は上に凸（concave）であるから、そのグラフは端点での値 $g(\alpha_0) \geq 0$ と $g(\frac{\pi}{2}) = 0$ を結ぶ弦（chord）より上にある。したがって、ここでも $g \geq 0$ である。

よって全体で $g \geq 0$ であり、狭義の不等式 $k > \frac{4}{\pi}$ により、$0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ で運動エネルギーは真に正となる。円板は $\alpha = 0$ に至る前に静止することはなく、P は C に達する。特に、C において（$\alpha = 0$ とおいて）

$$3mb^2\dot{\alpha}^2 = \frac{\pi k m g b}{2} - 2mgb \quad \Longrightarrow \quad \omega^2 = \frac{(\pi k - 4)g}{6b},$$

である。ここで ω は P が C にあるときの角速度である。（条件 $k > \frac{4}{\pi}$ がどこから来るのかがここでわかる。これはちょうど $\omega^2 > 0$ となるための条件である。）

軸に働く抗力

P が C にあるとき、二つのことが同時に起こる。

- 糸は自然長になっている（$AC = \pi b$ であり、弧の部分はなくなる）ので、$T = 0$ である。
- Q は O の鉛直上方にあるので、その重さは O のまわりにモーメントをもたない。

したがってこの瞬間、軸のまわりのモーメントはなく、角加速度（angular acceleration）は 0 である。円板の中心 O は固定されており、Q は角加速度 0 で半径 $2b$ の円周上を動くので、その加速度は純粋に向心的（centripetal）である。すなわち、大きさ $2b\omega^2$ で Q から O に向かう向き、つまり鉛直下向きである。

考えてみよう 抗力を求める方程式にはどの力が入るか？

系全体（円板と Q）に対して、鉛直方向にニュートンの第 2 法則を適用する。外力は、下向きの二つの重さ $2mg$、軸に働く上向きの抗力 R、そしてこの瞬間には 0 である糸の張力である。Q と円板の間の内力は打ち消し合う。加速度をもつのは Q だけであるから

$$R - 2mg = m\,(-2b\omega^2),$$

であり、したがって

$$R = 2mg - 2mb\cdot\frac{(\pi k-4)g}{6b} = 2mg - \frac{mg(\pi k-4)}{3} = \frac{mg(10-\pi k)}{3},$$

となり、求める結果が得られた。（この瞬間、Q は水平方向の加速度をもたないので、抗力の水平成分は 0 である。）

検算

- 境界の場合 $k = \frac{4}{\pi}$ では、系は $\omega = 0$ でかろうじて C までじわじわと到達し、公式は静止時の値 $R = 2mg$ を与える。これは整合的である。
- 運動方程式 $6mb^2\ddot{\psi} = 2bT - 2mgb\cos\psi$（ただし $\psi = \frac{\pi}{2} - \alpha$）をコンピュータで数値積分する。$m = g = b = 1$、$k = 2$ とすると、$\omega^2 = 0.38053$ で C に達し、これは $(2\pi - 4)/6$ と一致し、$R = 1.23894 = (10 - 2\pi)/3$ となる。$k = 1.29,\ 1.5,\ 3$ に対しても小数第 6 位まで一致する。
- $k > \frac{10}{\pi}$ ならば公式は $R < 0$ を与える。このとき軸は下向きに引かなければならない。Q が頂点を十分速く回るため、向心力として系の重さ以上の力が必要になるからである。

よくある間違い

- 伸びを常に πb としてしまう。実際には P が C に達するにつれて伸びは 0 まで縮み、それゆえそこで張力が消えるのである。
- 円板自身の慣性モーメント $\frac{1}{2}m(2b)^2$ を忘れ、Q のものだけを用いてしまう。
- C での運動エネルギーが正であることだけを示してしまう。「P が C に達する」には、そこに至るまでずっと運動エネルギーが正であり続ける必要がある。

STEP のその先へ

最後のステップは、「外力の総和は全質量と重心の加速度の積に等しい」という法則の剛体版であり、支点における抗力はその古典的な応用例である。大学 1 年次の剛体力

学の講義では、これを角運動量（angular momentum）の方程式 $\mathrm{d}\mathbf{L}/\mathrm{d}t = \boldsymbol{\tau}$ とあわせて展開する。不等式 $\cos\alpha \leq 1 - 4\alpha^2/\pi^2$ はジョルダンの不等式（Jordan's inequality）$\sin x \geq 2x/\pi$ の親戚であり、ここでは標準的な凸性（convexity）の議論によって証明した。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、固定軸のまわりの回転と支点の抗力を非常にわかりやすく扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。