解答例

STEP III 1992、第 12 問

力学 ・ 運動量保存則

STEP III 1992、問 12

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

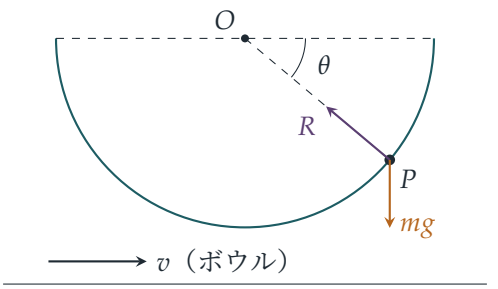
step.maths.org/questions/92-s3-q12

鍵となる考え方

ボウルと質点からなる系には外部から水平方向の力がはたらかず、重力以外に仕事をする力もない。したがって二つの保存則が成り立つ。水平方向の運動量保存（conservation of momentum）とエネルギー保存（conservation of energy）である。運動量の式でボウルの速さと $\dot{\theta}$ が結びつき、さらにエネルギーの式から v^2 が得られる。抗力（reaction）については、ボウルとともに（加速しながら）動く座標系で考えるのが最もすっきりしている。その座標系では、質点は単に O を中心とする円運動をする。また、抗力はボウルにはたらく唯一の水平方向の力でもあることを覚えておこう。

解答

モデル化。ボウルはなめらかなので、P にはたらく抗力 R は法線方向、すなわち PO に沿ってはたらく。台車は軽く、テーブルはなめらかなので、ボウル（台車を含む）にはたらく水平方向の力は、質点が押す力の水平成分だけである。P は縁の右端から動き始めるものとし、P が滑り降りるにつれて θ が 0 から増加するようにとる。このときボウルは右向きに動く。



水平方向の運動量保存

ボウルの水平方向の位置を X とし、$\dot{X} = v$ とする。O から見ると質点は $(a\cos\theta,\ -a\sin\theta)$ にあるので、その位置は $(X + a\cos\theta,\ -a\sin\theta)$ であり、速度は

$$(v - a\dot{\theta}\sin\theta,\ -a\dot{\theta}\cos\theta).$$

である。系には外部から水平方向の力がはたらかず、はじめは静止しているので、水平方向の全運動量はゼロのまま保たれる：

$$2mv + m(v - a\dot{\theta}\sin\theta) = 0 \quad \Longrightarrow \quad 3v = a\dot{\theta}\sin\theta,$$

これで求める結果が得られた。このとき質点の水平方向の速度は $v - 3v = -2v$ となることに注意しよう。すなわち質点はボウルの 2 倍の速さで左向きに動く。ボウルの運動量 $2mv$ を打ち消すためには、当然そうでなければならない。

エネルギー

抗力は全体として仕事をせず（内力であり、面はなめらかである）、テーブルも仕事をしないので、エネルギーは保存される。OP が角 θ をなすとき、質点は $a\sin\theta$ だけ落下している。$a\dot{\theta} = 3v/\sin\theta$ を用いると、質点の鉛直方向の速さは $a\dot{\theta}\cos\theta = 3v\cot\theta$ となるので、

$$\begin{aligned} mga\sin\theta &= \tfrac{1}{2}(2m)v^2 + \tfrac{1}{2}m[(2v)^2 + 9v^2\cot^2\theta] \\ &= mv^2\left(3 + \tfrac{9}{2}\cot^2\theta\right). \end{aligned}$$

両辺に $2\sin^2\theta/m$ を掛けると：

$$2ga\sin^3\theta = v^2(6\sin^2\theta + 9\cos^2\theta) = v^2(9 - 3\sin^2\theta),$$

したがって

$$v^2 = \frac{2ga\sin^3\theta}{3(3 - \sin^2\theta)},$$

これが 2 番目の結果である。

抗力

> **考えてみよう** ボウルは加速している。PO に沿った質点の運動方程式はどのように書けばよいだろうか？

二つの方程式を用いる。まずボウルについて考える。質点は O から P に向かう向きの力 R でボウルを押し、その水平成分は右向きに $R\cos\theta$ である。よってボウルの加速度 A は次を満たす。

$$2mA = R\cos\theta. \tag{1}$$

次に質点については、ボウルの座標系で考える。この座標系では、質点は O を中心とする半径 a の円周上を速さ $a\dot{\theta}$ で運動し、R と mg に加えて、左向きの慣性力（fictitious force）mA を受ける。O に向かう方向（向き $(-\cos\theta, \sin\theta)$）に分解すると、重力の寄与は $-mg\sin\theta$、慣性力の寄与は $+mA\cos\theta$ であるから、

$$R - mg\sin\theta + mA\cos\theta = ma\dot{\theta}^2. \tag{2}$$

（同じことであるが、地面に固定した座標系では、質点の加速度はボウルの加速度 A と、ボウルに対する円運動の加速度との和である。これを PO に沿って分解しても同じ式が得られる。）

最初の二つの結果から、

$$a\dot{\theta}^2 = \frac{9v^2}{a\sin^2\theta} = \frac{6g\sin\theta}{3-\sin^2\theta}.$$

(1) から得られる $mA = \frac{1}{2}R\cos\theta$ を (2) に代入し、R を含む項をまとめると：

$$R\left(1+\tfrac{1}{2}\cos^2\theta\right) = mg\sin\theta + \frac{6mg\sin\theta}{3-\sin^2\theta} = mg\sin\theta\,\frac{9-\sin^2\theta}{3-\sin^2\theta}.$$

$1+\frac{1}{2}\cos^2\theta = \frac{1}{2}(3-\sin^2\theta)$ であるから、

$$\boxed{R = \frac{2mg\sin\theta\,(9-\sin^2\theta)}{(3-\sin^2\theta)^2} = \frac{2mg\sin\theta\,(8+\cos^2\theta)}{(2+\cos^2\theta)^2}.}$$

検算

- 最初は $\theta = 0$ であり、$R = 0$ となる。これは当然である。質点は縁で静止しており、それをボウルに押しつけるものは何もない。
- 最下点 $\theta = \frac{1}{2}\pi$ では、(1) よりボウルの加速度はゼロであり、$a\dot{\theta}^2 = 3g$、$R - mg = 3mg$ となるので $R = 4mg$ である。これは公式から得られる値 $2mg\cdot 8/2^2$ と一致する。
- ボウルが固定されている（無限に重い）場合、よく知られた結果は $v_P^2 = 2ga\sin\theta$ および $R = 3mg\sin\theta$ である。ボウルが反動で動くと、縁の近くでは R は小さくなる（ボウルが P から遠ざかるため、θ が小さいとき $3mg\sin\theta$ ではなく約 $2mg\sin\theta$ となる）が、最下点では大きくなる（$3mg$ ではなく $4mg$）。
- 完全な運動方程式を数値的に解いてみると（$m = 1.3$、$a = 0.7$、$g = 9.81$ として）、縁から最下点までの全区間で、$3v = a\dot{\theta}\sin\theta$、$v^2$ の公式、R の公式がいずれも 10^{-7} 以内の誤差で再現された。

よくある間違い

- ボウルが固定されているかのように $R - mg\sin\theta = ma\dot{\theta}^2$ と書いてしまう。ボウルは加速するので、質点の加速度はボウルに対する円運動の加速度だけではない。
- 質点の運動エネルギーとして $\frac{1}{2}m(a\dot{\theta})^2$ を用いてしまう。$a\dot{\theta}$ はボウルに対する速さであって、テーブルに対する速さではない。

STEP のその先へ

これは 2 自由度（two degrees of freedom）の系であり、最も整った体系的な扱い方はラグランジュ力学（Lagrangian mechanics）である。運動エネルギーと位置エネルギーを X と θ で表すと、ラグランジアンに X が現れない（それは「循環座標」（cyclic coordinate）である）ため、運動量保存則が自然に導かれる。ここで用いた慣性力は、非慣性系（non-inertial frame）における力学の最も簡単な場合であり、大学 1 年次の講義では、これを遠心力（centrifugal force）やコリオリ（Coriolis）力を伴う回転座標系へと拡張する。Kleppner and Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、非慣性系と、相互作用する物体の系の両方を非常によく扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。