解答例

STEP III 1992、第 11 問

力学 ・ 衝突と反発係数

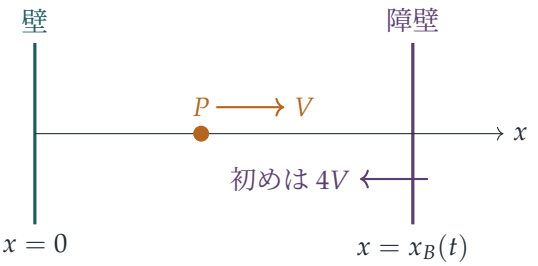
> **STEP III 1992、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/92-s3-q11

鍵となる考え方

すべての位置を壁から測ることにすると、粒子と障壁のそれぞれについて、壁からの距離が簡単な式で表される。衝突とは、これらの式のうち二つが一致する瞬間にほかならず、したがって時刻を求める各問題は二次方程式に帰着する。衝突の際には、ニュートン（Newton）の反発の法則（law of restitution）が**相対速度**（relative velocity）に対して適用されるので、その瞬間の障壁自身の速度が重要になる。

解答

P を、なめらかな台の上を、O を通り壁に垂直な直線に沿って運動する質点とみなす。x を壁 AB からの距離とし、障壁に向かう向きを正とする。また時刻 t は打ち出した瞬間から測る。速度は壁から離れる向きを正とする。



1 回目の衝突

障壁は距離 $\frac{75}{32}VT$ の位置から速度 $-4V$ で動き始め、一定の加速度 $+4V/T$ をもつ。したがって等加速度運動（constant acceleration）の公式により

$$x_B(t) = \tfrac{75}{32}VT - 4Vt + \frac{2Vt^2}{T}, \qquad v_B(t) = -4V + \frac{4Vt}{T}.$$

である。最初に何かに当たるまでは、P は一定の速さで運動する（台はなめらかである）から、$x_P = Vt$ である。両者が出会うのは $x_P = x_B$ のときである。$s = t/T$ とおくと

$$2s^2 - 5s + \tfrac{75}{32} = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad 64s^2 - 160s + 75 = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad (8s-5)(8s-15) = 0.$$

となる。最初に出会うのは小さい方の根であるから、衝突は題意のとおり $t = 5T/8$ に起こる。（それより前では差 $x_B - x_P$ は正である。$s = 0$ で正であり、その間に根をもたないからである。）

この瞬間、P は $x = \frac{5}{8}VT$ にあり、障壁の速度は

$$v_B\left(\tfrac{5}{8}T\right) = -4V + \tfrac{5}{2}V = -\tfrac{3}{2}V,$$

である。よって障壁はまだ壁に向かって速さ $\frac{3}{2}V$ で動いている。

衝突後の速さ

障壁の運動は影響を受けないので、必要なのはニュートンの実験法則だけである。近づく速さは $V - (-\frac{3}{2}V) = \frac{5}{2}V$ である。衝突直後の P の速度を w とすると、遠ざかる速さは $-\frac{3}{2}V - w$ であり、

$$-\tfrac{3}{2}V - w = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{5}{2}V \quad\Longrightarrow\quad w = -\tfrac{11}{4}V.$$

となる。したがって P は速さ $\dfrac{11V}{4}$ で壁に向かってはね返る。

> **考えてみよう** はね返った後の速さが、それ以前に P がもっていた速さ V より大きいのはなぜか。

衝突の瞬間、障壁は P に向かって動いている。バットがボールを打つのと同じである。反発の法則は**障壁に対する** P の速さに作用する。障壁から見ると、P は $\frac{5}{2}V$ で到着し、$\frac{5}{4}V$ で離れていく。これに障壁自身の壁向きの速さ $\frac{3}{2}V$ を加え戻すと $\frac{11}{4}V$ になる。

壁でのはね返りと 2 回目の衝突

P は距離 $\frac{5}{8}VT$ を速さ $\frac{11}{4}V$ で進まなければならず、それには $\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{11}T = \frac{5}{22}T$ かかる。よって P が AB に当たる時刻は

$$t_1 = \tfrac{5}{8}T + \tfrac{5}{22}T = \tfrac{75}{88}T.$$

である。障壁がその途中で邪魔をすることはありえない。この時間内、障壁は P より遅い速さで壁に向かって動いており（その速さは $\frac{3}{2}V$ から減少していく）、しかもそもそも壁に到達することがない。障壁が最も壁に近づくのは $t=T$ のときで、このとき $v_B=0$ かつ $x_B=\frac{75}{32}VT-4VT+2VT=\frac{11}{32}VT>0$ である。

壁は固定されているので、$e=\frac{1}{2}$ より粒子は速さ $\frac{11}{8}V$ ではね返り、その後は

$$x_P=\tfrac{11}{8}V\left(t-\tfrac{75}{88}T\right)=\tfrac{11}{8}Vt-\tfrac{75}{64}VT.$$

となる。障壁との次の衝突は、t_1 より後で初めて $x_P=x_B$ となる時刻である。$s=t/T$ を用いて表すと

$$\tfrac{75}{32}-4s+2s^2=\tfrac{11}{8}s-\tfrac{75}{64}\quad\Longleftrightarrow\quad 128s^2-344s+225=0\quad\Longleftrightarrow\quad(8s-9)(16s-25)=0.$$

である。根は $s=\frac{9}{8}$ と $s=\frac{25}{16}$ である。$\frac{75}{88}<1<\frac{9}{8}$ であるから、どちらも t_1 より後である。t_1 において差 $x_B-x_P=x_B(t_1)$ は正であるから、差が初めて 0 になるのは小さい方の根である。したがって障壁との次の衝突は、題意のとおり開始から時刻 $9T/8$ に起こる。（検算として、そのとき両者はともに $x=\frac{3}{8}VT$ にある。）

考えてみよう 任意の根ではなく、小さい方の根をとらなければならないのはなぜか。

この二次方程式は、二つの運動があたかも互いにすり抜けられるかのように記述している。2 番目の根 $\frac{25}{16}T$ は、実際の衝突の後、すでに運動が変化してしまった後の「出会い」にあたる。物理的な衝突は、差が初めて 0 になる時刻である。

検算

- $t=\frac{5}{8}T$ において：$x_B=\frac{75}{32}-\frac{80}{32}+\frac{25}{32}=\frac{20}{32}=\frac{5}{8}$（$VT$ を単位とする）であり、x_P に等しい。
- $t=\frac{9}{8}T$ において：$x_B=\frac{75}{32}-\frac{144}{32}+\frac{81}{32}=\frac{12}{32}=\frac{3}{8}$ であり、$x_P=\frac{11}{8}\cdot\frac{24}{88}=\frac{3}{8}$ である。
- $V=T=1$ として時間刻み（刻み幅 10^{-6}）のシミュレーションを行うと、衝突は $t\approx 0.6250$（はね返り後の速度 -2.750）、$0.8523\approx\frac{75}{88}$、$1.1250$ に見いだされた。

よくある間違い

- 反発の法則を P の速さだけに適用し、$\frac{11}{4}V$ ではなく $\frac{1}{2}V$ を得てしまう。障壁は動いているので、相対速度を用いること。
- 加速度の符号を誤る。障壁は壁に向かって動き**始める**が減速しており、$t=T$ で向きを変える。

- P が AB ではね返る前に、障壁が P（あるいは壁）に到達しないことの確認を忘れる。

STEP のその先へ

ここでのうまい工夫は、衝突の瞬間における障壁の座標系（frame）で考えることである。障壁は非常に重いので、反発の法則は、固定された壁の場合とまったく同じように、相対速度の向きを反転させ大きさを定数倍する。このように座標系を取り替えることは大学 1 年の力学の中心的な考え方であり、ガリレイ不変性（Galilean invariance）や、二体衝突における重心系（centre-of-mass frame）へとつながっていく。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、これらの考え方を丁寧に展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。