解答例

STEP III 1992、第 10 問

純粋数学 ・ 弧長と面積

> **STEP III 1992、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/92-s3-q10

鍵となる考え方

2 つの周長はどちらも弧長（arc length）の積分であり、初等的には計算できない（これらは**楕円積分**（elliptic integrals）である）。したがって、両者が等しいことを示す唯一の方法は、一方の積分を他方の積分に変形することである。それぞれの曲線について弧長の微小要素を書き下し、$\cos^2 + \sin^2 = 1$ を用いて各被積分関数（integrand）を簡単にする。そのうえで置換（substitution）と少しの対称性（symmetry）を使えば、2 つが同じ積分であることがわかる。面積のほうはどちらも直接計算できるので、より易しい。

（問題用紙に印刷された範囲は $\frac{1}{4}\theta$ で終わっている。これは明らかに $\frac{1}{4}\pi$ の誤植（misprint）であり、ここでは $-\frac{1}{4}\pi < \theta < \frac{1}{4}\pi$ とする。）

解答

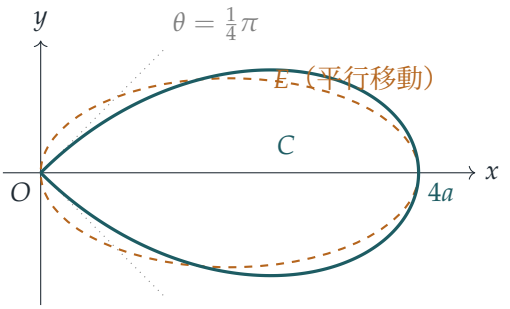
C の概形

$-\frac{1}{4}\pi < \theta < \frac{1}{4}\pi$ のとき $-\frac{1}{2}\pi < 2\theta < \frac{1}{2}\pi$ であるから、（$a > 0$ として）範囲全体で $r = 4a\cos 2\theta > 0$ である。いくつかの特徴を挙げる。

- $r(-\theta) = r(\theta)$ であるから、C は始線（initial line）に関して対称である。
- 最大値 $r = 4a$ は $\theta = 0$ でとり、その点は $(4a, 0)$ である。
- $\theta \to \pm\frac{1}{4}\pi$ のとき $r \to 0$ であるから、曲線は原点に入り込み、そこで直線 $\theta = \pm\frac{1}{4}\pi$ に接する（tangent）。

よって C は 1 つの閉じたループであり、4 枚の花びらをもつバラ曲線（rose）$r = 4a\cos 2\theta$

の花びら 1 枚で、x 軸の正の部分に沿って横たわっている。図には、C とともに、同じ区間 $0 \le x \le 4a$ にわたるように $2a$ だけ平行移動した E の写しを示してある。



C の周長

極方程式で表された曲線（polar curve）では、弧長の微小要素は $\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 = r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2$ を満たす。ここでは $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = -8a\sin 2\theta$ であるから、

$$\begin{aligned} r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 &= 16a^2\cos^2 2\theta + 64a^2\sin^2 2\theta \\ &= 16a^2\left(1 + 3\sin^2 2\theta\right). \end{aligned}$$

したがって、θ が $(-\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi)$ を動くときループはちょうど 1 回描かれるので、

$$\text{周長：} C = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} 4a\sqrt{1 + 3\sin^2 2\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

$\phi = 2\theta$ と置換すると、$\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\mathrm{d}\phi$ となり、積分区間の端は $\pm\frac{1}{2}\pi$ になる。

$$\text{周長：} C = 2a\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1 + 3\sin^2\phi}\,\mathrm{d}\phi = 4a\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + 3\sin^2\phi}\,\mathrm{d}\phi,$$

最後の等号は、被積分関数が ϕ の偶関数（even function）であることによる。

E の周長

$x = 2a\cos\phi$、$y = a\sin\phi$ とすると、

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\phi}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\phi}\right)^2 = 4a^2\sin^2\phi + a^2\cos^2\phi = a^2\left(1 + 3\sin^2\phi\right),$$

であり、ϕ が 0 から 2π まで動くとき E はちょうど 1 回描かれるので、

$$\text{周長：} E = a\int_0^{2\pi} \sqrt{1 + 3\sin^2\phi}\,\mathrm{d}\phi.$$

考えてみよう なぜ $\displaystyle\int_0^{2\pi}\sqrt{1+3\sin^2\phi}\,\mathrm{d}\phi$ は $[0,\frac{1}{2}\pi]$ 上の積分の 4 倍になるのか。

$g(\phi)=\sqrt{1+3\sin^2\phi}$ とおく。$\sin^2(\pi-\phi)=\sin^2\phi$ であるから、$[\frac{1}{2}\pi,\pi]$ 上の g のグラフは $[0,\frac{1}{2}\pi]$ 上のグラフを鏡に映したものであり、$\int_0^{\pi}g=2\int_0^{\pi/2}g$ となる。また $\sin^2(\phi+\pi)=\sin^2\phi$ であるから、g は周期（period）π をもち、$\int_{\pi}^{2\pi}g=\int_0^{\pi}g$ となる。（幾何学的には、楕円の 4 つの象限（quadrant）にある部分の長さが等しいということである。）したがって

$$\text{周長：}E=4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1+3\sin^2\phi}\,\mathrm{d}\phi,$$

これは C の周長として得た式とまったく同じである。よって 2 つの周長は等しく、しかも積分を計算する必要は一度もなかった。

面積

極方程式で表された曲線が囲む面積は $\frac{1}{2}\int r^2\,\mathrm{d}\theta$ である。$\cos^2 2\theta=\frac{1}{2}(1+\cos 4\theta)$ を用いると、

$$\begin{aligned}\text{面積：}C&=\frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}16a^2\cos^2 2\theta\,\mathrm{d}\theta=4a^2\int_{-\pi/4}^{\pi/4}(1+\cos 4\theta)\,\mathrm{d}\theta\\&=4a^2\Big[\theta+\tfrac{1}{4}\sin 4\theta\Big]_{-\pi/4}^{\pi/4}=4a^2\cdot\frac{\pi}{2}=2\pi a^2.\end{aligned}$$

楕円については、反時計回りに描かれる閉曲線が囲む面積は $\frac{1}{2}\oint\left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\phi}-y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\phi}\right)\mathrm{d}\phi$ であり、これから

$$\text{面積：}E=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(2a^2\cos^2\phi+2a^2\sin^2\phi\right)\mathrm{d}\phi=\frac{1}{2}\cdot 2a^2\cdot 2\pi=2\pi a^2.$$

が得られる。（同じことだが、これはよく知られた $\pi\times$ 半軸 $\times$ 半軸 $=\pi(2a)(a)$ である。）よって 2 つの面積は等しく、どちらも $2\pi a^2$ である。

検算

- $a=1.7$ として各曲線を 200 000 角形で近似すると、どちらの周長も 16.470362 となり、これはシンプソンの公式（Simpson's rule）で求めた $4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1+3\sin^2\phi}\,\mathrm{d}\phi$ の値に一致する。したがって各周長はおよそ $9.6884a$ である。
- 同じ多角形で、どちらの面積も $18.158406=2\pi(1.7)^2$ となった。
- C の面積の妥当性の確認：C は長方形 $0\le x\le 4a$、$|y|\le 1.1a$ の内部にあり、その面積はおよそ $8.8a^2$ である。$2\pi a^2\approx 6.3a^2$ はその妥当な割合である。

よくある間違い

- $\phi = 2\theta$ と置換するとき、$\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\mathrm{d}\phi$ から生じる因子 $\frac{1}{2}$ を忘れる。C の係数 $4a$ はいったん $2a$ になり、偶関数を使う段階を経て初めて再び $4a$ になる。
- 極方程式の曲線の面積として、$\frac{1}{2}\int r^2\,\mathrm{d}\theta$ の代わりに $\int r\,\mathrm{d}\theta$ を使う。
- $0 \le \theta < 2\pi$ に対するバラ曲線 $r = 4a\cos 2\theta$ 全体を C とみなしてしまう。与えられた範囲は花びら 1 枚だけを取り出している。

STEP のその先へ

積分 $\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2\sin^2\phi}\,\mathrm{d}\phi$ は**第 2 種完全楕円積分**（complete elliptic integral of the second kind）であり、初等的な原始関数（antiderivative）をもたない。問題が積分の計算を禁じているのはこのためである。楕円の周長には閉じた形（closed form）の式が存在しないのである。ここでの積分は $k^2 = -3$ の場合にあたる。$\sin^2\phi$ を $1 - \cos^2\phi$ で置き換え、さらに ϕ を $\frac{1}{2}\pi - \phi$ で置き換えることにより、$0 < k < 1$ の標準形に書き直すことができる。楕円積分の研究は楕円関数（elliptic functions）や楕円曲線（elliptic curves）へとつながり、これらは現代の数論（number theory）の中心にある。Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題集）には、極方程式や媒介変数表示（parametric）で表された曲線の弧長や面積をこのように比較する STEP の問題がさらに収められている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。