解答例

STEP III 1992、第 1 問

純粋数学 ・ マクローリン級数

> **STEP III 1992、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/92-s3-q1

鍵となる考え方

小問 (i) では、2 つの恒等式（identity）が導関数を次々と生み出す装置となる。f'' を f' で表してしまえば、それより高階の導関数はすべてもう一度微分するだけで得られ、$x = 0$ ではすべてが $f'(0) = \frac{1}{2}$ から組み立てられる。小問 (ii) で厄介なのは因子 $\sinh x$ であり、これは原点で消える。x を掛けるとその零点が打ち消され、展開は手計算で求められる 2 つの級数の積になる。対称性（奇関数と偶関数）から、どのべきが現れうるかが前もってわかる。

解答

小問 (i)

$f(x) = \ln(1 + e^x)$ を合成関数の微分法（chain rule）で微分すると、

$$f'(x) = \frac{e^x}{1 + e^x} > 0,$$

となるので、その対数は定義され、

$$\ln[f'(x)] = \ln e^x - \ln(1 + e^x) = x - f(x),$$

となる。これが 1 つ目の結果である。この恒等式を微分すると、左辺は $f''(x)/f'(x)$ となるので、

$$\frac{f''(x)}{f'(x)} = 1 - f'(x) \quad \Longrightarrow \quad f''(x) = f'(x) - [f'(x)]^2,$$

となり、題意が示された。これを $f'' = f'(1 - f')$ と書いておくと便利である。

考えてみよう $\ln(1+e^x)$ を 4 回も微分することなく、f''' と f'''' を得るにはどうすればよいか？

恒等式 $f'' = f' - (f')^2$ そのものを微分すればよい。$(f')^2$ には積の微分法（product rule）を用いる：

$$f''' = f'' - 2f'f'' = f''(1-2f'),$$
$$f'''' = f'''(1-2f') - 2(f'')^2.$$

ここで $x=0$ における値を求める。このとき $f(0) = \ln 2$、$f'(0) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ である：

$$f''(0) = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{4},$$
$$f'''(0) = \tfrac{1}{4}\left(1 - 2\cdot\tfrac{1}{2}\right) = 0,$$
$$f''''(0) = 0 - 2\left(\tfrac{1}{4}\right)^2 = -\tfrac{1}{8}.$$

マクローリンの定理（Maclaurin's theorem）より $f(x) = \sum f^{(n)}(0)\, x^n/n!$ なので、

$$f(x) = \ln 2 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} - \frac{x^4}{192} + \cdots,$$

となる。x^3 の項は消えている（また $-\frac{1}{8} \div 24 = -\frac{1}{192}$ である）。

小問 (ii)

g がそのような展開をもたない理由。 非負のべきからなる級数 $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$ は、$x=0$ で有限の値 a_0 をとり、そこで連続である。ところが $\sinh 0 = 0$、$\cosh 0 = 1$ なので、分母 $\sinh x \cosh 2x$ は $x \to 0$ のとき 0 に近づく。実際、小さい x に対して $\sinh x \approx x$ なので $g(x) \approx 1/x$ であり、これは 0 の近くで有界でない。したがって、原点の近くで $g(x)$ がそのような級数に等しくなることはありえない。

$xg(x)$ が展開をもつ理由。

$$x\,g(x) = \frac{x}{\sinh x} \cdot \frac{1}{\cosh 2x}.$$

と書く。$\sinh x = x\left(1 + \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + \cdots\right)$ なので因子 x は打ち消され、

$$\frac{x}{\sinh x} = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + \cdots},$$

となる。これは定数項が 1 である級数分の 1 であり、このような逆数は二項展開（binomial expansion）によって非負のべきで展開できる。同様に $\cosh 2x \geq 1$ は決して消えないので、$1/\cosh 2x$ も同じように展開できる。このような級数 2 つの積もまた、同様の級数である。

偶数乗のみが現れる理由。 sinh は奇関数（odd function）、cosh は偶関数（even function）なので $\mathrm{g}(-x) = -\mathrm{g}(x)$、すなわち g は奇関数である。よって $h(x) = x\,\mathrm{g}(x)$ は $h(-x) = (-x)(-\mathrm{g}(x)) = h(x)$ を満たし、h は偶関数である。$h(x) = \sum a_n x^n$ とすると、$h(x) - h(-x) = 2\sum_{n\text{ が奇数}} a_n x^n$ は恒等的に消える。恒等的に消えるべき級数（power series）はすべての係数が零であるから、すべての奇数 n に対して $a_n = 0$ である。（直接見ることもできる：上の 2 つの因子はどちらも x^2 の級数である。）

展開。 $u = \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120}$ として $(1+u)^{-1} = 1 - u + u^2 - \cdots$ を用い、x^4 までの項を残すと、

$$\frac{x}{\sinh x} = 1 - \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{120} + \frac{x^4}{36} + \cdots = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{7x^4}{360} + \cdots,$$

となる。ここで $\frac{1}{36} - \frac{1}{120} = \frac{10-3}{360}$ を用いた。次に、（$\frac{(2x)^2}{2}$ と $\frac{(2x)^4}{24}$ から）$\cosh 2x = 1 + 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + \cdots$ なので、$v = 2x^2 + \frac{2}{3}x^4$ とおくと、

$$\frac{1}{\cosh 2x} = 1 - v + v^2 - \cdots = 1 - 2x^2 - \tfrac{2}{3}x^4 + 4x^4 + \cdots = 1 - 2x^2 + \tfrac{10}{3}x^4 + \cdots.$$

2 つの級数を掛け合わせ、べきごとにまとめると：

$$\begin{aligned} x\,\mathrm{g}(x) &= \left(1 - \tfrac{1}{6}x^2 + \tfrac{7}{360}x^4\right)\left(1 - 2x^2 + \tfrac{10}{3}x^4\right) + \cdots \\ &= 1 - \left(2 + \tfrac{1}{6}\right)x^2 + \left(\tfrac{10}{3} + \tfrac{2}{6} + \tfrac{7}{360}\right)x^4 + \cdots \\ &= 1 - \frac{13}{6}x^2 + \frac{1327}{360}x^4 + \cdots, \end{aligned}$$

となる。ここで $\frac{10}{3} + \frac{1}{3} = \frac{11}{3} = \frac{1320}{360}$ である。

検算

- (i) で x^3 の項が現れないのは偶然ではない。$\mathrm{f}(x) - \frac{x}{2} = \ln(\mathrm{e}^{-x/2} + \mathrm{e}^{x/2}) = \ln(2\cosh\frac{x}{2})$ は偶関数なので、$\frac{x}{2}$ の後には偶数乗しか現れない。
- 数値的に確かめると、$x = 0.1$ において $\ln(1+\mathrm{e}^x) \approx 0.7443966600$ と 4 次式 $\ln 2 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} - \frac{x^4}{192}$ は約 3.5×10^{-10} の精度で一致する。
- $x = 0.05$ において、$x\,\mathrm{g}(x)$ と $1 - \frac{13}{6}x^2 + \frac{1327}{360}x^4$ の差は約 9×10^{-8} で、これはおよそ $6x^6$ である。次の項が x^6 の項であることから予想されるとおりである。

よくある間違い

- $1/(1+u)$ を $1-u$ までしか展開しないこと。u^2 の項は x^4 に寄与する（上の $\frac{1}{36}$ と $4x^4$）。

- $2x$ の 4 乗が $16x^4$ であることを忘れて、$\cosh 2x = 1 + 2x^2 + \frac{x^4}{24} \cdots$ と書いてしまうこと。

STEP のその先へ

小問 (ii) は**極**（pole）をもつ関数の話である。g は $1/x$ のように発散し、x を掛けるとその特異点（singularity）が取り除かれる。複素解析（complex analysis）では、このような関数は**ローラン級数**（Laurent series）$\frac{1}{x}\left(1 - \frac{13}{6}x^2 + \cdots\right)$ をもち、$1/x$ の係数（**留数**（residue）、ここでは 1）は多くの実積分を計算する鍵となる。この級数の収束半径（radius of convergence）は、分母の次に近い零点によって決まる。それは $\cosh 2x = 0$ となる点 $x = \pm\frac{\pi}{4}\mathrm{i}$ である。Needham の *Visual Complex Analysis*（視覚的にとらえる複素解析）は、これらの考え方を見事に展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。