解答例

STEP II 1992、第 9 問

純粋数学 ・ スカラー三重積

> **STEP II 1992、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/92-s2-q9

鍵となる考え方

$\mathbf{r}$ の式を、$\mathbf{a}$ に $\mathbf{b}-\mathbf{a}$ と $\mathbf{c}-\mathbf{a}$ の一次結合を加えた形に変形すると、これが A, B, C を通る平面（plane）であることがわかる。その平面の法線ベクトル（normal）は、平面内にある 2 つのベクトルの外積（cross product）で与えられ、その外積を展開すると、問題に現れる 3 つの三重積（triple product）がちょうど現れる。そのあとは、恒等式（identity）が**すべての** λ, μ に対して成り立つので、都合のよい値を選べばよい。

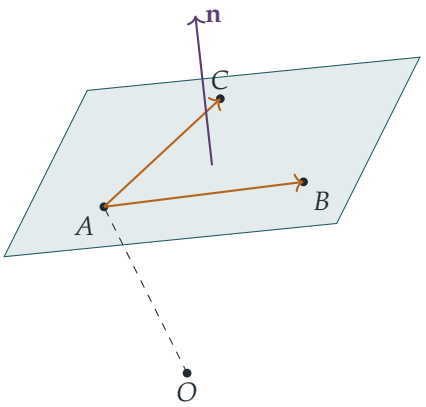
解答

軌跡

方程式を次のように書き直す。

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + \lambda(\mathbf{b}-\mathbf{a}) + \mu(\mathbf{c}-\mathbf{a}).$$

これは点 A に、ベクトル $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b}-\mathbf{a}$ と $\overrightarrow{AC} = \mathbf{c}-\mathbf{a}$ の任意の一次結合を加えたものである。この 2 つのベクトルは平行ではない。もし平行なら A, B, C は一直線上にあることになるが、直線と O を合わせたものは必ずある平面上にあり、これは仮定により除外されている。したがって、λ と μ がすべての実数を動くとき、$\mathbf{r}$ は A, B, C **を通る平面**を描く。$(\lambda, \mu) = (0,0), (1,0), (0,1)$ とすると、それぞれ A, B, C 自身が得られる。O は平面 ABC 上にないので、この平面は原点を通らない。



方程式 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}=p$

平面の法線ベクトルは $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ の両方に垂直であるから、

$$\mathbf{n}=(\mathbf{b}-\mathbf{a})\times(\mathbf{c}-\mathbf{a}),$$

とおく。2 つのベクトルは平行でないので、これは零ベクトルではない。$\mathbf{a}\times\mathbf{a}=\mathbf{0}$ と $\mathbf{u}\times\mathbf{v}=-\mathbf{v}\times\mathbf{u}$ を用いて展開すると、

$$\begin{aligned}\mathbf{n}&=\mathbf{b}\times\mathbf{c}-\mathbf{b}\times\mathbf{a}-\mathbf{a}\times\mathbf{c}+\mathbf{a}\times\mathbf{a}\\&=\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{a}+\mathbf{a}\times\mathbf{b}.\end{aligned}$$

平面上のすべての点は、A と $\mathbf{n}$ に垂直なベクトルだけ異なるので、$\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}$ である。$\mathbf{a}$ は $\mathbf{c}\times\mathbf{a}$ にも $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ にも垂直であるから、

$$p=\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}=\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}).$$

よって平面の方程式は $\mathbf{r}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{a}+\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ である。

考えてみよう $\mathbf{r}$ のパラメータ表示を代入すると、$\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}$ はどうなるか。

$\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}, \mathbf{b}\cdot\mathbf{n}, \mathbf{c}\cdot\mathbf{n}$ が必要である。あるベクトルは、それ自身を含む外積に必ず垂直であるから、いずれの場合も 3 つの項のうち 2 つが消える。

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}=\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}),\qquad \mathbf{b}\cdot\mathbf{n}=\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a}),\qquad \mathbf{c}\cdot\mathbf{n}=\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}).$$

点 $\mathbf{r}=(1-\lambda-\mu)\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}+\mu\mathbf{c}$ はすべての λ, μ に対して平面上にあるので、$\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}=p$ から

$$(1-\lambda-\mu)\,\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})+\lambda\,\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a})+\mu\,\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}).$$

が得られる。両辺から $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ を引くと、すべてのスカラー λ, μ に対して

$$-(\lambda+\mu)\,\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})+\lambda\,\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a})+\mu\,\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=0$$

となり、示すべき式が得られた。

結論の導出

この恒等式はすべての λ, μ に対して成り立つので、項を切り分けられるような値を選ぶ。

- $\lambda = 1, \mu = 0$： $-\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) + \mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a}) = 0$。
- $\lambda = 0, \mu = 1$： $-\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) + \mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = 0$。

これらを合わせると

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a}) = \mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}).$$

を得る。（同じことであるが、左辺は λ と μ について一次式であり恒等的に零なので、λ の係数も μ の係数もともに零でなければならない。）

A, B, C, O が同一平面上にある場合

このとき、$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ はすべて O を通る 1 つの平面上にある。$\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ はその平面に垂直（または零）であるから $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = 0$ となり、同様に残りの 2 つの三重積も零になる。幾何学的には、$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ が張る平行六面体（parallelepiped）はつぶれていて体積が零である。結果は依然として成り立つが、自明に $0 = 0 = 0$ となるだけである。A, B, C が一直線上にない（非共線（non-collinear））ならば、軌跡（locus）は依然として平面であるが、原点を通るので $p = 0$ となり、その方程式は $\mathbf{r}\cdot\mathbf{n} = 0$ である。A, B, C が一直線上にあるならば $\mathbf{n} = \mathbf{0}$ であり、軌跡は直線にすぎない（3 点がすべて一致すれば 1 点になる）ので、この議論からは何の情報も得られない。

検算

- $\mathbf{a} = \mathbf{i}, \mathbf{b} = \mathbf{j}, \mathbf{c} = \mathbf{k}$ とすると、3 つの三重積はすべて 1 に等しく、$\mathbf{n} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $p = 1$ となる。平面は $x + y + z = 1$ であり、確かに 3 点を含む。
- 整数成分の 3 つのベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ をランダムに 2000 組とり、厳密な分数計算で確かめた。$\mathbf{n}$ の展開形、p の値、ランダムな λ, μ に対する方程式 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{n} = p$、そして 3 つの三重積の一致は、いずれも厳密に成り立った。同一平面上にある組では、三重積はすべて 0 であった。

よくある間違い

- $(\mathbf{b}-\mathbf{a})\times(\mathbf{c}-\mathbf{a})$ を展開するときの符号の誤り。項 $-\mathbf{b}\times\mathbf{a}$ は $+\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ に、$-\mathbf{a}\times\mathbf{c}$ は $+\mathbf{c}\times\mathbf{a}$ になる。

- なぜ $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$ なのかを述べ忘れること。まさにここで、同一平面上にないという条件（A, B, C が一直線上にないことを通して）が使われる。

STEP のその先へ

スカラー三重積（scalar triple product）$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ は、行が $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ である 3×3 行列式（determinant）に等しく、ここで証明した巡回対称性は、行の巡回置換（cyclic permutation）（2 回の入れ替え）で行列式が変わらないという事実にほかならない。その値は 3 つのベクトルが張る平行六面体の符号付き体積であり、それが零になるのはベクトルがちょうど一次従属（linearly dependent）であるとき、すなわち同一平面上にある場合である。大学 1 年次の講義では、これが体積の拡大率としての行列式の一般論へと発展する。Strang の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）がこれをわかりやすく展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。