解答例

# STEP II 1992、第 8 問

純粋数学 • 積分の技法

> **STEP II 1992、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/92-s2-q8

## 鍵となる考え方

各小問に一つずつ、計三つの標準的な手法を用いる。(i) では分母を完全に因数分解（factorise）し、**重複した**因数があることに気づく。そのため部分分数分解（partial fractions）には 2 乗の項が必要になる。(ii) では置換（substitution）$t = \tan\frac{x}{2}$ により、$\sin x$ と $\cos x$ の任意の有理関数（rational function）が $t$ の有理関数に変わる。ここでは得られる 2 次式がきれいに因数分解できる。(iii) では $\sinh x$ を指数関数（exponentials）で表して $u = \mathrm{e}^x$ と置換すると、やはり部分分数分解に帰着する。

## 解答

### 小問 (i)

$x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ であるから、分母は $(x-1)^2(x+1)$ である。因数 $x-1$ が重複しているので、

$$\frac{x}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1},$$

すなわち

$$x = A(x-1)(x+1) + B(x+1) + C(x-1)^2.$$

を満たす定数を求める。$x = 1$ を代入すると $1 = 2B$ となり、$B = \frac{1}{2}$ である。$x = -1$ を代入すると $-1 = 4C$ となり、$C = -\frac{1}{4}$ である。$x^2$ の係数を比較すると $0 = A + C$ とな

り、$A = \frac{1}{4}$ である。よって

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{(x-1)(x^2-1)}\,\mathrm{d}x &= \int \left(\frac{1}{4(x-1)} + \frac{1}{2(x-1)^2} - \frac{1}{4(x+1)}\right)\mathrm{d}x \\ &= \tfrac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{2(x-1)} - \tfrac{1}{4}\ln|x+1| + c \\ &= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2(x-1)} + c.\end{aligned}$$

**小問 (ii)**

$t = \tan\frac{x}{2}$ とおく。すると

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2},$$

である。最後の式は $\mathrm{d}t/\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2} = \frac{1}{2}(1+t^2)$ による。したがって

$$3\cos x + 4\sin x = \frac{3-3t^2+8t}{1+t^2} = \frac{(1+3t)(3-t)}{1+t^2},$$

となり、因数 $1+t^2$ が約分される。

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{3\cos x + 4\sin x} = \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{(1+3t)(3-t)}.$$

**考えてみよう** 2 次式 $3+8t-3t^2$ が因数分解できることは、どうすればわかるだろうか。

その判別式（discriminant）は $64+36 = 100 = 10^2$ で完全平方数であるから、根 $t = 3$ と $t = -\frac{1}{3}$ は有理数である。（これは偶然ではない。$3^2+4^2 = 5^2$ であり、これは後で述べる三角関数の合成（harmonic form）の振幅（amplitude）が整数になる理由でもある。）

次に $\dfrac{2}{(1+3t)(3-t)} = \dfrac{a}{1+3t} + \dfrac{b}{3-t}$ とおくと、$2 = a(3-t) + b(1+3t)$ である。$t = 3$ を代入すると $b = \frac{1}{5}$、$t = -\frac{1}{3}$ を代入すると $\frac{10}{3}a = 2$ となり $a = \frac{3}{5}$ である。したがって

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{3\cos x + 4\sin x} &= \int \left(\frac{3}{5(1+3t)} + \frac{1}{5(3-t)}\right)\mathrm{d}t = \tfrac{1}{5}\ln|1+3t| - \tfrac{1}{5}\ln|3-t| + c \\ &= \frac{1}{5}\ln\left|\frac{1+3\tan\frac{x}{2}}{3-\tan\frac{x}{2}}\right| + c.\end{aligned}$$

別解として、$\cos\beta = \frac{4}{5}$、$\sin\beta = \frac{3}{5}$ として $3\cos x + 4\sin x = 5\sin(x+\beta)$ と表すこともできる。このとき積分は $\frac{1}{5}\int \operatorname{cosec}(x+\beta)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\ln|\tan\frac{1}{2}(x+\beta)| + c$ となる。二つの答えは一致する。実際、$\tan\frac{\beta}{2} = \frac{1}{3}$（$\tan\frac{\beta}{2} = \frac{\sin\beta}{1+\cos\beta} = \frac{3/5}{9/5}$ による）であるから、加法

定理（addition formula）より

$$\tan\tfrac{1}{2}(x+\beta)=\frac{t+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}t}=\frac{1+3t}{3-t}.$$

となる。

**小問 (iii)**

$\sinh x=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})$ であるから、分子と分母に $\mathrm{e}^x$ を掛けると

$$\frac{1}{\sinh x}=\frac{2\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}-1}.$$

となる。$u=\mathrm{e}^x$ と置換すると $\mathrm{d}u=\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ であるから、

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sinh x}&=\int\frac{2\,\mathrm{d}u}{u^2-1}=\int\left(\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u+1}\right)\mathrm{d}u=\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|+c\\&=\ln\left|\frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}\right|+c=\ln\left|\tanh\frac{x}{2}\right|+c,\end{aligned}$$

である。最後の変形では分子と分母を $\mathrm{e}^{x/2}$ で割った。すなわち $\dfrac{\mathrm{e}^{x/2}-\mathrm{e}^{-x/2}}{\mathrm{e}^{x/2}+\mathrm{e}^{-x/2}}=\tanh\frac{x}{2}$ である。(ii) の別解で用いた $\int\operatorname{cosec}x\,\mathrm{d}x=\ln|\tan\frac{x}{2}|+c$ と見事に対応していることに注意しよう。

## 検算

それぞれの答えを微分してみる。たとえば (iii) では、$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\tanh\frac{x}{2}=\frac{\frac{1}{2}\operatorname{sech}^2\frac{x}{2}}{\tanh\frac{x}{2}}=\frac{1}{2\sinh\frac{x}{2}\cosh\frac{x}{2}}=\frac{1}{\sinh x}$ である。数値的には、シンプソンの公式（Simpson's rule）により、(i) の被積分関数の $\int_2^5$ は 0.548287、(ii) の被積分関数の $\int_0^1$ は 0.234276、$\int_{1/2}^2\operatorname{cosech}x\,\mathrm{d}x$ は 1.134488 となり、いずれも原始関数（antiderivative）から求めた値と小数点以下少なくとも 12 桁まで一致する。

## よくある間違い

- (i) で重複因数を見落として $\frac{A}{x-1}+\frac{C}{x+1}$ だけで分解しようとすること、あるいはそもそも $x^2-1$ が因数分解できることを忘れること。
- 対数の中の絶対値記号（modulus signs）を落とすこと。被積分関数は $x-1$、$1+3t$、$\tanh\frac{x}{2}$ が負の値をとるときにも定義されている。
- (ii) で $\mathrm{d}x$ から生じる因数 $\frac{2}{1+t^2}$ を忘れること。

## STEP のその先へ

置換 $t = \tan\frac{x}{2}$（ワイエルシュトラス置換（Weierstrass substitution）とよばれることもある）により、$\sin x$ と $\cos x$ の**あらゆる**有理関数が初等的な原始関数（elementary antiderivative）をもつことがわかる。$t$ のあらゆる有理関数は部分分数分解で処理できるからである。この背後には単位円の有理関数によるパラメータ表示があり、これはすべてのピタゴラス数（Pythagorean triples）を生成するのと同じものである。そもそもどのような関数が初等的な原始関数をもつのかという問いは、リウヴィル（Liouville）の定理や微分代数（differential algebra）へとつながっていく。積分の解析的な基礎については、Abbott, *Understanding Analysis*（解析学の入門書）を参照するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。